

Bulletin

Mathematics The Beauty of Mathematical Reasoning

Mit Beiträgen von | Avec les contributions de

Claire Burrin

Hugo Parlier & Bruno Teheux

Ioan Manolescu

Elise Raphael & Shaula Fiorelli

Armin P. Barth

Venera Gashaj

Holger Herz

Agnes Bäker, Christiane Barz & Eugen Gorich

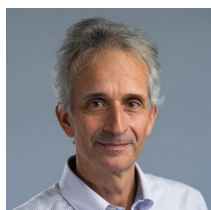
VSH-AEU-Bulletin 3

October 2025

49th Year

ISSN 1663-9898

Visual Design:
Damaris Pfeffinger, Graphic Designer, Basel
damaris.pfeffinger@gmx.ch | @damarispfeffinger



EDITORIAL

Christian Bochet
Président VSH-AEU

Photo : Christian Bochet

Chèr·e·s membres de la VSH-AEU

Mathématiques. Ce mot a la capacité de générer tout un spectre d'émotions, allant de l'effroi à l'admiration, ou du scepticisme au respect. Quoi de plus légitime de lui consacrer une édition de notre Bulletin !

Dès le premier article, notre curiosité est aiguïlée par quelques exemples particulièrement bien choisis, montrant l'importance de la curiosité comme porte d'entrée dans un domaine. Des éventuelles applications suivront...ou pas.

La dualité des mathématiques, comme science à part entière et comme outil au service d'autres sciences, se manifeste également dans l'enseignement des diverses disciplines. Prenons le cas que je connais le mieux : la chimie. Lors d'examens de troisième année de BSc, donc en principe le dernier moment avant de certifier avec un titre académique, je constate régulièrement une incapacité totale des étudiant·e·s en sciences à résoudre une équation quadratique, une simple règle de trois, voire une multiplication. Cette constatation n'est propre ni à la chimie ni à l'Université de Fribourg, ce qui m'a été confirmé par de nombreux collègues d'autres disciplines et d'institutions (il reste malgré tout une exception pour l'EPFL, qui a mis en place un système de sélection très strict à la fin du premier semestre ; nous en reparlerons plus loin). Or, ces mêmes étudiant·e·s ont passé avec succès des examens de maturité, où le programme de mathématiques est nettement plus étendu de ce qui est requis en chimie. De plus, chaque étudiant·e en sciences suit un cours de mathématiques propédeutiques ; l'examen correspondant représente un tel poids dans la moyenne finale qu'il est quasi-éliminatoire. Il est donc

légitime de conclure que le niveau requis est atteint. Donc : où se trouve le problème ? Une explication pourrait se trouver dans la manière d'enseigner les mathématiques dès le plus jeune âge, qui l'isole dans son propre domaine et fait perdre de vue son rôle comme outil d'abstraction et d'observation. L'esprit scientifique se développe très tôt, et une adaptation tardive sera moins efficace. Cet effet est en outre aggravé par le système de Bologne, qui fractionne l'apprentissage en petits modules autonomes, récompensés par des crédits ECTS. Chaque année lors de séances de présentation de notre programme d'études aux futur·e·s étudiant·e·s, arrive la question récurrente « est-ce qu'il y aura des maths ? », suggérant qu'une réponse positive pourrait leur faire changer d'orientation. Cette terreur, manifestement instillée lors de leur formation antérieure, n'est pas totalement injustifiée, dans la mesure où les mathématiques ont été, et le sont encore, utilisés comme instrument de sélection (comme par exemple à l'EPFL), voire considérés comme marqueurs précoces de réussite professionnelle (ce qui a été le cas en France pendant longtemps : probablement un vestige du positivisme d'Auguste Comte). Cela dit, cette approche n'est pas dénuée de sens, pour autant que l'enseignement primaire et secondaire les y préparent correctement.

Il est intéressant de noter que la majorité de nos auteurs et autrices ont choisi d'aborder les mathématiques sous l'angle de l'enseignement et de la communication, et des éléments de réponses aux observations ci-dessus y figurent. J'ai relevé en particulier dans deux articles le fait que l'on ne peut pas correctement comprendre ce dont il s'agit en restant un spectateur passif et

une véritable participation active des élèves est indispensable. Il est également très réjouissant de constater l'excellence de la recherche en Suisse par ses nombreux lauréats de la médaille Fields.

Comme il s'agit du dernier Bulletin de cette année, je vous souhaite déjà une très bonne fin de semestre, et me réjouis de vous voir nombreux et nombreuses lors de notre assemblée générale le 5 décembre à Fribourg.

Christian Bochet

MATHEMATICS | THE BEAUTY OF MATHEMATICAL REASONING

EDITORIAL	3
Christian Bochet	
A HUMAN STORY OF CURIOSITY AND RELEVANCE	6
Claire Burrin (University of Zurich)	
THE SIMPLICITY OF COMPLEXITY, A STORY OF MATHEMATICAL OUTREACH	9
Hugo Parlier (University of Fribourg) & Bruno Teheux (University of Luxembourg)	
HUGO DUMINIL-COPIN AND SWISS MATHEMATICS	15
Ioan Manolescu (University of Fribourg)	
QUELS LIEUX, PUBLICS ET FORMATS POUR LA MÉDIATION EN MATHS ? RÉFLEXIONS AUTOUR D'EXEMPLES DU GENÈVE EVASIONS MATHÉMATIQUES ET DU MATHSCOPE	19
Elise Raphael & Shaula Fiorelli (Université de Genève)	
BRIEF AN EINEN JUNGEN MENSCHEN, DER PLANT, MATHEMATIK ZU UNTERRICHTEN	26
Armin P. Barth (ETH Zürich)	
FROM FINGERS TO FORMULAS: MOTOR SKILLS, EMBODIMENT, AND THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICAL THINKING	32
Venera Gashaj (HfH Zürich)	
ZUR MATHEMATISIERUNG DER VOLKSWIRTSCHAFTSLEHRE	35
Holger Herz (Universität Freiburg)	
MONDAY MORNING: SHOULD I SLEEP IN OR ZOOM IN? IF (AND WHEN) LECTURE ATTENDANCE RELATES TO ACADEMIC PERFORMANCE	38
Agnes Bäker (VU Amsterdam), Christiane Barz (University of Zurich) & Eugen Gorich (University of Munich)	
GENERALVERSAMMLUNG ASSEMBLÉE GÉNÉRALE	45
VSH-AEU	
STELLENAUSSCHREIBUNG POSTES À POURVOIR	46

A HUMAN STORY OF CURIOSITY AND RELEVANCE

Claire Burrin (University of Zurich)

Mathematics is changing. Computers are verifying proofs, checking calculations, and exploring complex structures that would overwhelm human effort. Nonetheless, human creativity remains irreplaceable: we ask the questions and imagine the possibilities. This partnership is transforming research and also has consequences for teaching.

Computers can perform calculations and check proofs, but the responsibility to understand, question, validate, is still ours. Mathematical thinking helps to distinguish reliable knowledge from mere outputs. This discipline of rigour is indispensable to ensure that our increasing reliance on black boxes (computers, algorithms, AI) enhances rather than diminishes our intellectual judgment. And so, we will be increasingly tasked with guiding students in interpreting outputs, asking the meaningful questions, and appreciating the conceptual and creative side of mathematics.

Why do mathematicians study some problems and not others? What were the original questions that inspired their work? How do abstract ideas, sometimes centuries later, shape the world we live in? Here, digital security, data transmission, compression, mathematical modelling, all come to mind.

Of course, other sciences share this trajectory. A physicist might point to quantum mechanics, once a purely theoretical exercise, now central to semiconductors and lasers. Or a chemist might point to the periodic table, now foundational for drug design and materials. Curiosity-driven research is where tomorrow's breakthroughs are quietly prepared. Making this point clear to students — the next generation — is also part of the mission of a strong mathematical education.

I want to illustrate these ideas with a few anecdotes about a mathematical object that is fundamental to my own research, the lattice.

From Babylon to Digital Security

Whenever we send an email or use our credit card online, we rely on cryptographic protocols to keep our data secure. One of the pillars of internet security is the RSA algorithm, and its principle is taught in every algebra course: every whole number can be uniquely factored as a product of prime numbers — the so-called fundamental theorem of arithmetic.

The fascination with factoring is ancient. Clay tablets from ancient Babylonia, dating back to nearly four thousand years, record sophisticated tables of reciprocals and products, hinting at an early understanding of how numbers can be factored and combined. Aristotle reflected on those numbers that cannot be divided further, the prime numbers. Primes are, in effect, the atoms of numbers, simple building blocks from which all whole numbers are constructed.

Multiplying two large primes is easy, a computer does it in milliseconds. However, reversing the process, to factor back the product into primes, is a completely different story: once the primes reach a few hundred digits, the best-known algorithms take exponential time to solve this problem.

Modern security rests on the assumption that such a problem will remain hard for computers. Yet we know since the 1990s that a quantum computer could, in principle, factor whole numbers much more efficiently, rendering RSA and similar protocols obsolete. If building a quantum computer remains a great technological challenge, the uncertainty surrounding it has accelerated the race for post-quantum cryptography. Among the most promising candidates, we find lattice-based protocols.

In simple terms, a lattice is a regular grid of points extending through space. The definition can be explained to a student of linear algebra. Pick a set

of linearly independent vectors $v_1, v_2, \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ and take all possible integer linear combinations

$$\mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2 + \dots + \mathbb{Z}v_n$$

of these vectors. This produces a lattice: an orderly structure that exists in any number of dimensions.

The simplest and most famous hard problem associated with lattice-based cryptography is the Shortest Vector Problem (SVP): given a lattice, find its (nonzero) vector of shortest length. In two or three dimensions, it is easy: you just look. Once in thousands or millions of dimensions, the base vectors can point in many strange directions, making it exceptionally difficult to predict which integer combination results in the shortest vector. Finding it amounts to locating the proverbial needle in a multidimensional haystack.

Where a basic concept like prime numbers was enough for the first rudimentary encryption protocols, high-level modern number theory is at play to secure the most powerful protocols. For example, at a workshop I was co-organizing at the SwissMAP Research Station in Les Diablerets¹ this summer, a new robustness result for SVP was announced in connection to deep questions in number theory such as the Grand Riemann Hypothesis.

The Curse of Dimensionality

There's a joke among scientists: the engineer asks the mathematician, "How can you picture eleven-dimensional space?" The mathematician shrugs: "I imagine n -dimensional space and let n equal eleven." How often has mathematics been accused of being esoteric! But in applications to the Information Age, working in very large dimensions is actually the norm. A machine learning algorithm processes data as vectors in spaces with millions of coordinates. Search engines, when they rank pages, manipulate gigantic matrices. In fact, the search engine Google got its name from

the googol² 10^{100} which is meant to represent an unimaginably large number, far greater than the estimated number of atoms in the observable universe.

It then makes sense to develop a picture for eleven-dimensional, or one billion-dimensional space. In fact, it turns out that higher dimensional geometry behaves in ways that defy our everyday 2D/3D intuition. For example, in a high-dimensional cube, most of the volume concentrates not at the centre but rather near the corners, which is the opposite of what we observe in low dimensions. Many problems also see an exponential growth in complexity as dimension increases. To see this, imagine trying to sample the unit square with evenly spaced points — lattice points — at a distance of 0.1 of each other. For this we need one hundred points, but to do the same in 9 dimensions will require one billion points.

Another striking example is the sphere packing problem: What is the most space-efficient way to arrange spheres of equal size in space?³ In three dimensions, the best possible arrangement is the one you would expect: cannonball packing, that is, the pyramidal stacking of cannonballs. But in (most) higher dimensions, we do not even have an idea of what the densest packing would look like. Here again, we have an abstract question with very concrete consequences; in this case to coding theory. Imagine transmitting a message across a noisy channel. Each message can be represented as a point in high-dimensional space, and noise slightly shifts the point. By surrounding each point with a sphere representing the range of noise that can be tolerated, the received signal can still be decoded correctly. The goal is then to pack these spheres as densely as possible so that more information can be reliably transmitted.

Despite rapid and exciting developments in the last few years, still very little is known about the sphere packing problem in higher dimensions. Earlier this year, Boaz Klartag of the Weizmann Institute — currently visiting ETH for the Fall semester — announced a remarkable result based on

¹ Cf. <https://swissmaprs.ch/>.

² The term *googol* — essentially a made-up name — has a somewhat debated origin, as explained in sources such as

[Wikipedia.org/wiki/Googol](https://en.wikipedia.org/wiki/Googol), which connects interestingly to the theme of popular mathematics.

³ Cf. [Einstein Lectures: Maryna Viazovska - The sphere packing problem](#).

combining geometry and probability theory: the existence of a high-dimensional lattice sphere packing that is far denser than that was known before. Can we exhibit a concrete lattice with this property? Could these constructions improve coding protocols or other technologies?

Proof and Certainty

Abstract thinking is not unique to mathematics; physicists, engineers, or computer scientists all develop their own forms of conceptual reasoning. Mathematics is different in one essential respect: its currency is not experiment, but proof.

A proof is a rigorous chain of reasoning that shows a statement must be true. Unlike in other sciences, a proven theorem does not get overturned; its truth is permanent. This tradition goes back to the ancient Greeks, taking shape in Euclid's *Elements* (300 BC) and continues to define mathematical practice today. So much so that a mathematician's career is measured by what kind of theorems they prove, how many, and the elegance of their reasoning.

The story of the resolution of Kepler's conjecture, that the cannonball packing is the most efficient arrangement of spheres in 3D, is a very good illustration of the changes under way in the practice of mathematical research. If the balls have to be organised along a lattice, then Kepler's conjecture is easy to prove. But could a small perturbation of such a rigid arrangement produce yet a more space-efficient packing? Centuries of intuition could not settle the question.

It is the advent of the computer in the 20th century that finally did so. László Fényes Tóth observed in the 1950s that Kepler's conjecture could in principle be reduced to a finite, but exceedingly large, number of calculations. In the early 1990s, Thomas Hales and his student Samuel Ferguson carried out this program: a computer-based proof of the Kepler conjecture by case-exhaustion⁴. The result was a manuscript shy of 300 pages, complemented by 40000 lines of codes,

solving about 100000 linear programming problems.

At the time, assessing correctness meant painstakingly checking each detail by hand. A jury of twelve experts spent five years reviewing the work and ultimately declared to be "99% certain" of its correctness... a verdict that would have felt frustrating to any mathematician. Two decades later, the original paper was complemented with a formal, that is computer-verifiable, proof.

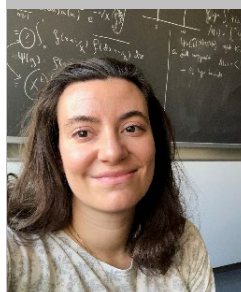
The nature of proof might be evolving but mathematics remains what it has always been: a discipline of curiosity. Every theorem begins as a question, sometimes naïve or purely theoretical, posed by someone who wanted to understand the symmetry of a form, or the shape of a pattern. Curiosity sparks understanding, which in turn enables applications — some that we cannot yet imagine.

University of Zurich, Institute of Mathematics, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zurich.

E-mail: claire.burrin@math.uzh.ch

Website: <https://user.math.uzh.ch/burrin/>

ORCID: [0000-0003-0036-5539](https://orcid.org/0000-0003-0036-5539)



Claire Burrin, Dr. sc. ETH, is assistant professor at the Institute of Mathematics of the University of Zurich.

Her research lies at the interface of number theory and dynamical systems, motivated by questions such as: How do arithmetic and geometric structures give rise to both random-like and extremal phenomena, and which analytic tools can be used to describe them?

She was previously a Hill Assistant Professor at Rutgers University in New Jersey, a senior assistant at ETH Zurich, and held various visiting positions, including in Princeton, Berkeley, and Bonn. She is part of the Zurich Dynamics Group, the NCCR SwissMAP — The Mathematics of Physics, and the Swiss-French collaborative project Equidistribution in Number Theory.

Photo credentials: Private

⁴ References to Hales's proof of the Kepler conjecture include the full scientific article in the *Annals of Mathematics* ([https://annals.math.princeton.edu/wp-](https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf)

[content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf](https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf)) and a more accessible overview in his *Notices of the AMS* article (<https://www.ams.org/notices/200004/fea-hales.pdf>).

THE SIMPLICITY OF COMPLEXITY, A STORY OF MATHEMATICAL OUTREACH

Hugo Parlier (University of Fribourg) & Bruno Teheux (University of Luxembourg)

Mathematics is notoriously hard to communicate. Communicating research level mathematics is near impossible, because the staggering pace of mathematical discovery leaves the general audience by and large in the dark. The notion of general audience doesn't really exist anyways, because scientific outreach needs to be tailored to specific audiences. In particular, cultural divides, including language and social barriers, make good practice more difficult to share. While all of these difficulties are often given as warnings for eager mathematicians wanting to share the beauty of their passion to a wider audience, despite being based in a mix of common sense and experience, maybe they're not as unsurmountable as they might seem.

This is an account of our experience, in part lead by chance and opportunity, in creating activities and bringing them to life in unexpected venues, including game festivals and two world expos.

The beginnings

We began working together in 2017, as colleagues in Luxembourg, via what one might call a "standard channel". We proposed a mathematical exhibit "Unpuzzling mathematics" for the Luxembourg Science Festival. Our proposal was initially refused because, from the refusal letter, "we had to make a choice between two mathematical workshops". We expressed our disappointment, and the organizers graciously offered us a free spot when there was a cancelation. The fact was that proposals from mathematics were rare, and it wasn't clear to the organizers how one could make mathematics attractive in a festival with cool lasers, robots and volcanoes to compete with.

That first festival was an eye-opener for us. Determined to make our exhibit a success, we aimed to create a space with a lounge type atmosphere, where visitors could enjoy mathematics without formalism, and so we presented a collection of games and activities, some that we had created and others that we bought, that had mathematics

in the background. The games were an excuse to talk about optimization, graph theory and topology, but most of all to give visitors the experience of mathematical exploration. The exhibit was hugely successful, ensuring our spot among the science outreach community in Luxembourg who welcomed and encouraged us to do more.



Illustration 1. Our first science festival setup (2017)

Emboldened by this first experience, we systematically created exhibits for science festivals. Without going into too much detail, we began to systematically create activities, always rooted in research and always tailor-made for the space we had imagined. While at first, we also used some of the wonderful games and activities that we found elsewhere, little by little all of our activities became homemade. For one thing, it is exhilarating to create new material but, more importantly, when you do, you can mould it to be able to best share whatever message or experience you are trying to get across. You can also design it to fit your atmosphere. Of course we are not interior designers, nor designers full stop, but making

and creating spaces that we enjoy makes it easier to be enthusiastic when trying to spike other people's interest.

Retrospectively, “breaking through” to an audience that attends science festivals isn't particularly difficult, even if you are competing with volcanoes. The audience is naturally curious and eager to engage. Our lounge atmosphere, in the hustle and bustle of a festival full of visitors, was a welcome haven of tranquillity. Our activities were never labelled as mathematics, and by proposing games we appealed to visitors' playful nature. The trick was to make sure visitors were surprised by what they saw, that they left thinking differently about mathematics and, above all, with a smile on their face. Having large numbers of visitors is radical for testing activities. You see what works well, and, importantly, what doesn't and what requires more guidance. We always tried new activities alongside others that we knew worked. What quickly emerged from all of this, were guidelines that we had been implicitly following, but that moulded our way of creating and adapting new material.

Principles

Here are just a few of the principles that we follow (sometimes):

Atmosphere: As mentioned above, the first thing was that we always try and create an inviting atmosphere. As anything related to mathematics requires some amount of thinking, a relatively calm atmosphere works nicely. By creating more an artsy vibe, we also suggest something along the lines of “mathematics is an art” and, without getting into the debate of how true this is, certainly creativity is a vital ingredient in mathematical exploration. This also, conveniently, challenges what visitors might expect from a science that is sometimes perceived as dry, cold and unforgiving.

Simplicity: when faced with visitors who either want to go see the volcano or who have been afraid of mathematics since 6th grade – there are lots of these, even in science festivals –, you can either let them go and focus on those who are bolder, or try to hook them somehow. But you have very little time to do so. We came up with the 10 second rule: the rules of a game, or “how

to” process of an activity, have to be deliverable in under 10 seconds. Mathematics is not a spectator sport: to enjoy them, you have to engage.

Simple and natural rules allow visitors to think “well, what can I lose by trying”. By building from simple rules, the contrast makes the emergence of complexity even more stunning.

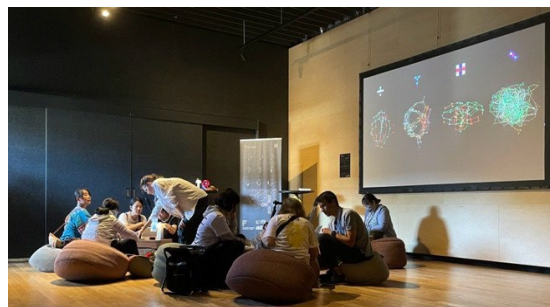


Illustration 2. Our mathematical lounge in Osaka

Mediation: The word “mediation” is less used in this context in English, in favour of “out-reach”, but it appeals to a vital part of the process. No matter how simple you make an activity, visitors regularly require encouragement. Sometimes it is a hint, sometimes a short conversation about “how is this math?”, and often just a “you can do this”. While a kid plays, ask a grandparent if they want to give it a try. In our experience, the kids sometimes have to drag the parents out to see the volcanoes.



Illustration 3. Mediation is key and leads to shared joy

Level up but go deep: In particular, start easy. If you don't have the pleasure of success pretty quickly, this will only reinforce deeper fears about “math is not for me”. It is remarkable how much time and effort visitors are willing to invest into more complicated ventures once they are emboldened by success and curiosity. How far or how deep visitors are willing to go varies of course. By creating activities that can be made

progressively difficult, with natural “stopping points”, visitors can go away with the satisfaction of having done something they had never done before, but also with the knowledge that there is more to explore.

Explicitly or implicitly hinting at research level math is a real bonus. If the activity provokes questions from visitors for which the only answer is “We wish we knew how to answer that: that’s an open problem!”, even better.

As with any set of principles, we are also happy to ignore them on occasion, especially for activities or visualizations that we reserve for the more tenacious visitors, those eager to know more about some of the deeper mathematics behind. The trick is not to over-explain. Not everyone who asks really wants to know all of the details. Spike curiosity and guide visitors willing or compelled to dig deeper, but don’t force information upon them. As educators, it is sometimes hard not to share what we know. After all, in some sense, that’s what we are trained to do. Empathy is more important than divulging knowledge in these contexts (and not only).

New venues

As our activities gained some traction, we started to get opportunities outside of science festivals and those aimed at schools. In particular, we were invited to participate in a game festival (the *Game On* festival in Luxembourg city). Again, a new challenge awaited. This time we weren’t going to be engaging with a public who signed up for science. And having games in a science festival is original, but hardly in this context. Luckily, some of our guiding principles came to the rescue. There are many extraordinary games in the world, and the games presented at the festival were as one might expect, very cool. However, many good board games need some time to get into. Our 10 second rule works really well in this context: you can get visitors hooked very quickly. Plus, because we presented tailor-made games, most visitors have never seen anything like them.

And while, of course, there are science buffs who are also gaming enthusiasts, the audience as a whole was quite different in composition, with visitors and families in particular not necessarily having an academic background.

Right before our invitation to a game festival, through an extraordinary series of circumstances, we had been invited to exhibit some of our activities at the World Expo in Dubai in 2021/2022 on the Luxembourg Pavilion¹. We had been eyeing the pavilion for a while, because we had heard that it had been designed in the shape of a Möbius band² which we thought was pretty cool (and it really was).

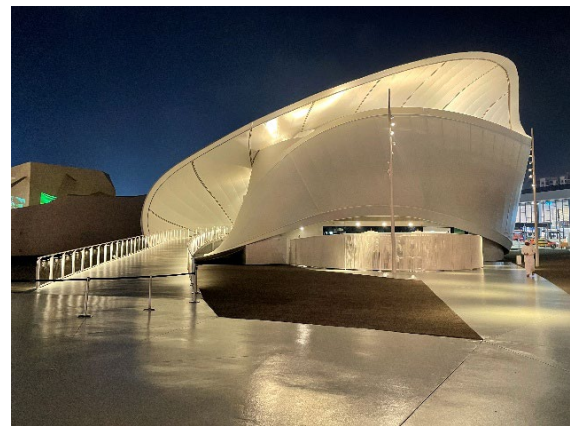


Illustration 4. Luxembourg Pavilion at Expo 2020 Dubai by Metaform Architects

Via colleagues at Sorbonne Abu Dhabi, we met with the Luxembourg ambassador to the Emirates and associates, who were enthusiastic and put us in contact with the pavilion who had very nice space for temporary exhibits and invited us for a “learning themed” week. Once again, we were lucky in many regards. The Luxembourg Pavilion was very successful, in particular because they had a really fun slide, so there were lots of visitors and they could easily visit our exhibit along their route. Our motto became “Come for the slide, stay for the math”, and, with something in the order of a thousand active daily visitors, the exhibit was a success. So much so that the pavilion asked if we would be willing to come back for a second residency, this time for a longer period. We did, and this time with a double purpose.

¹ https://gouvernement.lu/en/dossiers.gouv2024_mindigital+en+dossiers+2022+vr-dubai-2020.html.

² A Möbius band is obtained by pasting two opposite sides of a rectangle with a twist. It is an important example of a non-orientable surface and, in particular, it only has one side!

In addition to games, we presented early models of the “Life Lines” experience that will be described below.

Playing or creating. Competing or creating something collaborative. Solo or collective efforts. Again, by means of contrast and unexpected results, this invited visitors to get a glimpse of the diversity that can lie within mathematics, or at least to view it through very different lenses. Again, the magic worked and with 20000 drawings collected, 50000 puzzles solved, the numbers were there to prove it.

Between the Expo, the game festival, and science festivals, we were convinced that we could reach an audience of all ages, and with a large diversity of backgrounds. Keeping things very simple, visual and self-explanatory makes for universal appeal. Just by the sheer number of visitors, we had learned by experience when to intervene, how much encouragement was necessary, and when to give the visitors space. We had also learned how to pick up on certain warning signs. Our main goal was not to channel people’s math insecurities or to please parents eager to turn their kids into math wizzes.

When we were again contacted for the next universal expo, this time in Osaka, we were ready. In addition to a two-week residency on the Luxembourg Pavilion, we contacted the Swiss Pavilion and the Belgium Pavilion, both who were willing to host temporary events. Again, new challenges came up. Most participants were Japanese, and many spoke little or no English. While we didn’t use a lot of words to explain our activities, we did need to say something. We were also warned that it was difficult to engage with participants, that the cultural barrier wasn’t easy to breach, and that without Japanese translators we would get nowhere. We thus arranged for there to always be at least one person on site who spoke Japanese, but they weren’t trained as mathematicians.

We were faced with the double difficulty of getting sophisticated mathematics, and without the

possibility of detailed verbal explanations. Again, our principles came to the rescue. The rules of the games and activities are sufficiently intuitive that they can be demonstrated without words. And by sharing something new, surprising and which brings joy, allows to create an emotional bond that transcends cultural barriers. The universality of the pleasure of artistic creation or the satisfaction of solving a tricky puzzle is shared by visitor and mediator alike. We were also helped by the love of the Japanese for games and challenges. Not only would they engage, but every day we would have visitors, sometimes as young as 6 and sometimes well beyond retirement age, who would spend hours diligently trying to solve all the puzzles.

So, what did visitors do?

To give a flavour of the activities we presented, here are the activities we presented in Osaka.

Quadratis and Revolution

Quadratis³ is a puzzle type game where you are presented with a pattern of square tiles, which are then shuffled, and your goal is to restore the original pattern by sliding them around. The shuffling and sliding moves are dictated by the way the squares are pasted together, so in fact you are playing on a surface with “topology”, that is on a surface where sides are connected in possibly surprising ways. The puzzles range from downright easy to near impossible, with more or less everything in between. As an added advantage, visitors can download a version of the game for free.

Revolution⁴ is also a reconfiguration puzzle, but this time played on a physical board. Here “moves” come from rotating a wheel to move rings around, and your goal is to find a prescribed sequence of ring patterns. As the game progresses, puzzles become increasingly challenging.

³ Quadratis was co-created by H. Parlier and P. Turner with development by M. Gutierrez and R. Juarez and is available on <http://quadratis.app>.

⁴ Revolution was created and designed by H. Parlier and B. Teheux.

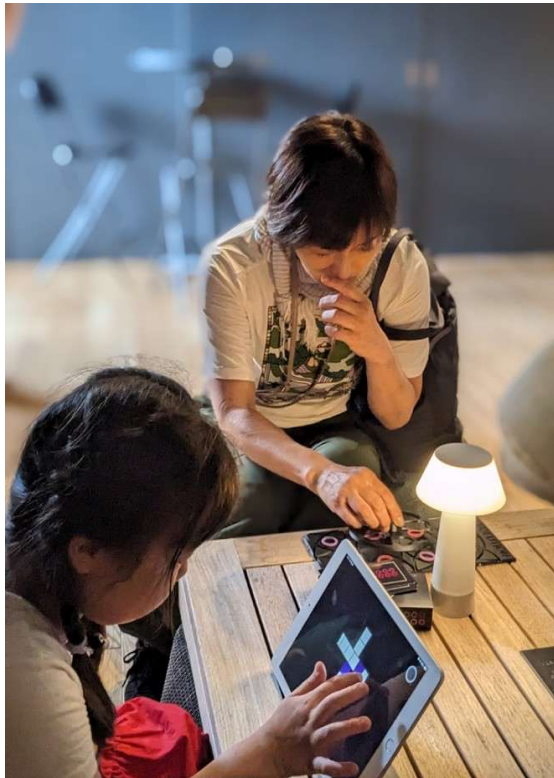


Illustration 5. *Playing Revolution and Quadratis in Osaka*

Behind both games are notions from topology, geometry and graph theory. Most questions one could ask about these games are largely unexplored: how many moves do I need to go from here to here? Is it always possible to relate two configurations? If so, how fast would an optimal algorithm do it? Can you write down an explicit algorithm to solve the puzzle?

These are all research level questions. In particular, some of these boil down to deep questions about moduli spaces⁵, vast spaces which encode how shapes relate to one another, and hot research topics in geometry. Other questions are directly related to graph theory and computational geometry. Graphs – or networks of possible patterns – can be visualized tracking moves made by players.

Life Lines

In Life Lines⁶, visitors are invited to use their finger to draw a curve of any shape they please with the only constraint being that it goes from left to right. The resulting drawing is then mysteriously coloured. You can then add more colours or rearrange them, but you quickly find out that your control is limited.

There seem to be laws dictating how zones are coloured. The drawings are collected and then shared with other visitors through interactive art pieces. Visitors can also explore the space of all drawings made by other visitors, and create morphings to see how two drawings relate.

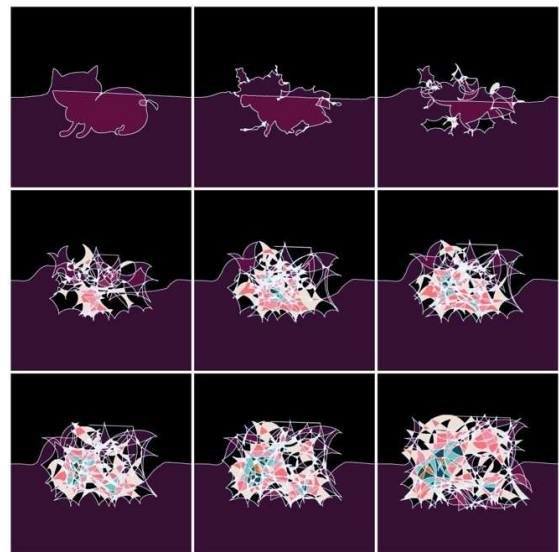


Illustration 6. *A morphing between figurative and abstract creations*

How *are* the picture coloured? We use another notion from topology, the so-called winding number, to track how many times curves “wrap” around the zones delimited by the drawing, taking into account the orientation of the drawing. This leads to a type of natural harmony among colours.

⁵ Moduli spaces are vast structured landscapes of all possible geometric forms. One of the most important experts in moduli space theory, and its relationship to curves on surfaces and hyperbolic geometry, was Maryam Mirzakhani (1977–2017), the first female Fields medalist. For her, mathematics were inherently an artistic pursuit: “The beauty of mathematics only shows itself to more patient followers.”

⁶ Life Lines, created by H. Parlier and B. Teheux, was first showcased in its current form at the *Shapes* exhibit at EPFL Pavilions in January 2025. See <https://epfl-pavilions.ch/en/exhibitions/shapes>.

And again, this activity is directly related to hot research topics. For one thing, from a philosophical point of view at least, by creating a drawing, you are sampling the space of all possible drawings, which again is a type of moduli space. But how do you measure proximity between drawings? We use what is commonly called the “dog-leash distance” (and formally called Fréchet distance) to measure how close two drawings are. We use recent efficient algorithms to do this, but there would be many other ways to measure these distances. With tens of thousands of drawings, we now have an extraordinary data base of collective creativity to explore using modern geometry.

What’s next? Why should we be doing this in the first place?

There is a very different point of view when doing mathematical outreach which is to insist on how important mathematics is, as a language for science and a tool for understanding the world.

Our point of view is hardly opposite to that, but it is definitely orthogonal. The activities we present are, hopefully, intrinsically interesting. It might be effective to play basketball to keep fit, but you can also play it just to have fun. Having fun doesn’t prevent you from improving your cardio. Reaching out is also about reaching a new public, people who aren’t aware of how interesting mathematics can be. Not every visitor needs to be turned into a mathematician, but one thing that would be great, is that every visitor leaves with the idea that mathematics is a thriving science with lots to be explored.

Department of Mathematics, University of Fribourg, Chemin du Musée 23, 1700 Fribourg, Switzerland.

E-mail: hugo.parlier@unifr.ch

Website: <https://homeweb.unifr.ch/parlierh/pub/>

ORCID: [0000-0001-5618-509X](https://orcid.org/0000-0001-5618-509X)



Hugo Parlier, Full Professor at the University of Fribourg since 2025, is a mathematician interested in the study of shapes and their deformations. Many of his results are related to the study of curves on surfaces and often have a combinatorial and visual flavour.

In addition, he is passionate about sharing the ever-evolving nature of mathematical research with as wide an audience possible.

Recently, his efforts and fruitful collaborations, often in collaboration with Bruno Teheux, led to activities involving puzzles and collaborative art activities being showcased in science museums, at the EPFL Pavilions, and at the World Expos in 2022 and 2025.

Photo credentials: Mike Zenari

Department of Mathematics, University of Luxembourg, Maison du Nombre, Avenue de la Fonte 6, 4364 ESCH, Luxembourg.

E-mail: Bruno.teheux@uni.lu

Website: <https://math.uni.lu/teheux/>

ORCID: [0000-0002-3007-3089](https://orcid.org/0000-0002-3007-3089)



Bruno Teheux, Assistant professor at the University of Luxembourg, is a mathematician active in mathematical logic. He investigates the semantics of non-classical logics through the lens of algebra and topology.

With his outreach activities, he contributes to creating and mediating at science festivals, games events, cultural festivals, and world expositions, where he loves updating audiences’ perspectives on mathematics. His goal is to combine elements such as games or art with mathematics to create a lasting emotion.

Photo credentials: Remi Grizard

HUGO DUMINIL-COPIN AND SWISS MATHEMATICS

Ioan Manolescu (University of Fribourg)

In 2022, Hugo Duminil-Copin (University of Geneva) obtained the Fields medal, the highest honour in mathematics, for his work on statistical mechanics. Through his work on percolation and the Ising model, he advanced our mathematical understanding of how phase transitions occur. His work is marked by a dedication to collaboration and the free exchange of ideas.

Switzerland and the Fields Medal

The Fields Medal is the highest distinction a mathematician can hope to receive. Awarded every four years at the International Congress of Mathematicians to at most four researchers under 40 years of age, it recognizes outstanding, original contributions to mathematics.

At the most recent ceremony, in 2022 in Helsinki¹, two of the four laureates were working in Switzerland: Maryna Viazovska (EPFL, Lausanne) and Hugo Duminil-Copin (University of Geneva). This remarkable success reflects not only individual brilliance, but also Switzerland's rise as one of the most vibrant centres of mathematical research in the world.

From Paris to Geneva

Born near Paris, Duminil-Copin studied at the École Normale Supérieure, a training ground for many of France's leading mathematicians. Like many of his generation, he was drawn to probability theory under the influence of Jean-François Le Gall and Wendelin Werner (Fields Medal 2006).

He then pursued his PhD at the University of Geneva under Stanislav Smirnov, himself a Fields Medalist (2010). Duminil-Copin has remained at Geneva ever since, while also holding a parallel

appointment at the Institut des Hautes Études Scientifiques near Paris.

His field is mathematical statistical mechanics: using the language of probability to understand the collective behaviour of vast systems of interacting particles. Although inspired by physical systems, these mathematical models have become fundamental objects of study in their own right, with deep connections to geometry, analysis, and computer science.

Origins: From Coal Filters to Phase Transitions

The roots of the field go back to a 1954 conversation between statistician Simon Broadbent and mathematician John Hammersley, who sought to model the passage of gas through coal-filter masks.² Their idea became the mathematical theory of percolation — the study of how a fluid traverses a random porous medium.

In percolation theory, space is represented by a network (or lattice) of sites connected by edges that can be open or closed with a certain probability p . When p is small, the network fragments into tiny clusters; when p exceeds a critical threshold, a giant connected component suddenly appears, allowing flow across the system — we then say percolation occurs.

This abrupt change, known as a phase transition, mirrors the sudden onset of magnetization or condensation in physical systems.

Percolation soon revealed deep ties to other models, notably the Ising and Potts models of magnetism. A unifying construction known as Fortuin–Kasteleyn (FK) percolation, provides a common framework and new tools for the study of these

¹ The 2022 International Congress of Mathematicians was supposed to take place in St. Petersburg. It was cancelled due to Russia's invasion of Ukraine.

² <https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf>

models. The celebrated Ising model, introduced in the 1920s, describes a ferromagnet as a grid of microscopic dipoles taking values ± 1 , with neighbouring spins tending to align. The transition from order to disorder as temperature rises is one of the paradigms of phase transitions.

From Kesten to Smirnov: Spectacular Advances in Percolation Theory

In 1980, Harry Kesten (Cornell University, USA) proved that for two-dimensional percolation on a square lattice, the critical probability equals $\frac{1}{2}$, and that the transition is sharp³ — a mathematically abrupt change from almost total impermeability to very strong percolation. This groundbreaking result ushered a decade of great progress in percolation theory, with Kesten playing a central role.

Two dimensions turned out to be uniquely tractable, thanks to special symmetries that physicists call conformal invariance.

Around 2000, Oded Schramm (Stanford University, USA) introduced the Schramm–Loewner Evolution (SLE), a tool that allowed rigorous descriptions of scaling limits of two-dimensional models. Building on this, Wendelin Werner and collaborators developed the related Conformal Loop Ensemble (CLE) framework, earning Werner the 2006 Fields Medal.

Then, in 2001, Stanislav Smirnov (University of Geneva) proved the conformal invariance of (a certain variant of) critical percolation⁴ and later extended it to the Ising model⁵. As a consequence, the scaling limits of these models⁶ were expressed in terms of the CLE objects mentioned above, thus confirming a fundamental conjecture in these two settings. Smirnov’s achievements established a rigorous bridge between lattice models and conformal field theory — and brought him the Fields Medal in 2010.

Smirnov’s arrival in Geneva in 2003 transformed the local landscape, attracting a new generation of probabilists and mathematical physicists: Vincent Beffara, Clément Hongler, and Hugo Duminil-Copin, who joined as a PhD student in 2008 among many others.

Hugo Duminil-Copin in Geneva

During his doctoral years, Duminil-Copin produced two landmark results.

First, he computed the connective constant for the hexagonal lattice⁷ — a key quantity describing the number of self-avoiding walks of a given length — using the discrete holomorphic techniques pioneered by Smirnov. Second, in collaboration with Beffara, he extended Kesten’s sharp-threshold results from percolation to FK-percolation, unifying several probabilistic models under a single rigorous framework.

These results, exceptional for any mathematician (let alone a doctoral student), already revealed what would become Duminil-Copin’s trademark: the ability to blend diverse ideas and methods — combinatorial, geometric, probabilistic — to unlock longstanding problems.⁸

After his PhD, he joined the Section of Mathematics in Geneva, forming a dynamic group that, together with those of Smirnov and Yvan Velenik, made Geneva one of the global hubs for probability and statistical mechanics.

The section became a magnet for visitors such as Michael Aizenman (Princeton) and Vladas Sidoravicius (IMPA, Brazil), and for talented young mathematicians including Vincent Tassion (now at ETH Zürich), Franco Severo, and Romain Panis.

In 2022, Duminil-Copin was awarded the Fields Medal “for solving longstanding problems in the theory of phase transitions,” notably in his joint

³ <https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf>

⁴ <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0764444201019917>.

⁵ <https://arxiv.org/abs/0708.0039>;
<https://arxiv.org/abs/1609.08527>;
<https://arxiv.org/abs/0910.2045>.

⁶ <https://arxiv.org/abs/math/0303354>.

⁷ <https://arxiv.org/abs/1007.0575>.

⁸ <https://arxiv.org/abs/1006.5073>

works with Aizenman and Sidoravicius on the Ising model in three and four dimensions⁹ — long considered the most difficult cases.

A Personal Glimpse: Mathematics as a Collective Art

I had the privilege of working as a postdoctoral researcher in Geneva between 2009 and 2012, witnessing first-hand the effervescent atmosphere that Hugo helped create. Contrary to the popular image of the solitary mathematician, this was a profoundly collaborative enterprise.

We would gather around a blackboard for hours, drawing pictures of percolation clusters, arguing, erasing, redrawing — each bringing a different intuition to the problem. Hugo's open-mindedness and curiosity set the tone: he listened, encouraged, and pushed ideas beyond their apparent limits.

One of his remarkable traits is the ability to juggle many threads of thought simultaneously. Sometimes he would explore an idea without knowing yet which project it belonged to; months later it would resurface as the missing piece of a major proof.

Equally distinctive is his intellectual empathy — his willingness to inhabit other people's ways of thinking, mastering tools from distant fields and merging them to striking effect. This is both valuable in discussions, as well when he revisits old techniques or theories.

His unwillingness to accept limitations of known techniques and his push to extend them to their maximal effect often led to unexpected improvements. Even well-established theories proved more powerful in his hands than previously imagined — such as the use of the OSSS inequality (developed in computer science) to prove the sharpness of phase transitions in FK-percolation, in collaboration with Tassion and Raoufi.¹⁰

Above all, Hugo's creativity is sustained by genuine passion. Days after receiving the Fields Medal, he was back at the blackboard, chasing new problems rather than celebrating old triumphs.

Following the visibility the Fields medal provides, he enthusiastically invests considerable time to popularizing and promoting mathematics. It would be all too easy for this important mission to monopolize his efforts at this crucial time. But somehow Hugo manages to work on several fronts.

Recent collaborations on high-dimensional lattice models (with Romain Panis) and refined studies of two-dimensional FK-percolation hint that the best may still be to come.

Switzerland as a Magnet for Mathematical Talent

The success of Duminil-Copin, Viazovska, Smirnov, Werner¹¹, Hairer, Figalli, and Ávila — all Fields Medalists¹² based in Swiss institutions — illustrates a broader trend.

Over the past two decades, Switzerland has become an international hub for mathematics, combining world-class universities, a collaborative culture, and stable long-term support through initiatives such as the NCCR SwissMAP.

This ecosystem now attracts brilliant young researchers from all over the world who find here not only intellectual freedom but also a sense of community rarely matched elsewhere.

In this environment, Hugo Duminil-Copin's work exemplifies what Swiss mathematics has become: rigorous, imaginative, collaborative, and profoundly human.

⁹ <https://arxiv.org/abs/1311.1937>;
<https://arxiv.org/abs/1912.07973>.

¹⁰ <https://arxiv.org/abs/1705.03104>.

¹¹ Wendelin Werner recently moved from ETHZ to the University of Cambridge.

¹² The Fields medal was awarded to 64 mathematicians since 1936.

University of Fribourg, Ch. du Musée 23, 1700 Fribourg

Email: ioan.manolescu@unifr.ch

Website: <https://homeweb.unifr.ch/manolesc/Pub/>

ORCID: [0000-0001-9140-5430](https://orcid.org/0000-0001-9140-5430)



Ioan Manolescu's research interests lie in probability theory and statistical mechanics. His work involves percolation, the random-cluster model, and self-avoiding walk. He studied at the Ecole Normale Supérieure in Paris (2005-2009) and obtained a PhD from the University of Cambridge under the supervision of Geoffrey Grimmett in 2012. He continued with a post-doc at the University of Geneva, in the group of Stanislav Smirnov and Hugo Duminil-Copin.

Since 2015 he has been a professor of mathematics at the University of Fribourg.

Photo credentials: Private.

QUELS LIEUX, PUBLICS ET FORMATS POUR LA MÉDIATION EN MATHS ?

RÉFLEXIONS AUTOUR D'EXEMPLES DU GENÈVE ÉVASIONS MATHÉMATIQUES ET DU MATHSCOPE

Elise Raphael & Shaula Fiorelli (Université de Genève)

Les modèles de communication scientifiques se sont fortement développés ces dernières décennies. Si, jusqu'à la fin des années 1990, on privilégiait une transmission très verticale du savoir — une personne ou une institution « sachante » partageant sa connaissance avec le public sans interaction, par exemple au travers de conférences ou d'expositions —, on observe que, depuis les années 2000, se multiplient des formats qui favorisent l'interaction et le dialogue. Influencés par des précurseurs comme le Palais de la Découverte (inauguré en 1937) ou l'Exploratorium de San Francisco (inauguré en 1969), les musées tablent de plus en plus sur des expositions interactives où les différents postes proposent des objets à manipuler. Les festivals de science où des chercheur·ses et des médiateur·ices scientifiques dialoguent directement avec le public fleurissent et même les conférences sont désormais très souvent suivies d'un moment d'échange avec le public. Ainsi, on assiste à une horizontalisation de la médiation : les intervenant·es se mettent plus à disposition du public et s'autorisent à être bousculé·es par ses questions. Les formats de science participative sont aussi de plus en plus nombreux, permettant au public de contribuer à de véritables projets de recherche.

Si les sciences en général, avec leur côté expérimental, se prêtent bien à cette interactivité, les mathématiques forment une catégorie un peu à part. Pour cette discipline les formats de science participative sont très difficiles à mettre en place,

car ils demandent d'importantes connaissances sur le sujet, les notions à aborder sont souvent très abstraites et surtout ne touchent a priori pas le public dans leurs préoccupations quotidiennes. Par ailleurs, pour de nombreuses personnes, la simple évocation des maths fait ressurgir des émotions négatives liées à leur expérience de cette matière enseignée à l'école. Comment, dès lors, susciter l'intérêt et l'engagement du public autour d'un domaine perçu à la fois comme abstrait, exigeant et chargé d'un héritage émotionnel souvent négatif ?

Pour tenter de répondre à cette question, nous allons d'abord nous pencher brièvement sur les publics que nous touchons avec les activités habituelles du Mathscope¹ et du Genève Évasions Mathématiques (G-EM)², les deux entités dédiées à la médiation en mathématiques de l'Université de Genève. Nous présenterons ensuite cinq nouveaux formats que nous avons mis, ou projetons de mettre, en place. Nous les examinerons à la lumière des six bonnes pratiques de la médiation culturelle définies par l'Observatoire romand de la culture³, en portant une attention particulière aux différents segments de publics définis dans l'article de Schäfer *et al.*⁴ — *Sciencephiles, Intérésés critiques, Soutiens passifs et Désengagés* — que ces dispositifs permettent de toucher.

¹ La Faculté des sciences de l'Université de Genève (UNIGE) abrite le Scienscope, l'ensemble des laboratoires publics visant à accueillir des groupes (principalement des classes) pour des activités de découverte des sciences. Le Mathscope est le laboratoire dédié aux mathématiques.

² Le G-EM, créé en 2024, regroupe toutes les activités de médiation scientifique en mathématiques proposées par la Section de mathématiques de l'UNIGE.

³ « Bonnes pratiques en médiation culturelle », *Observatoire Romand de la culture*, s.d., consulté le 6 octobre 2025, www.observatoire-culture.ch/ressources/bonnes-pratiques-en-mediation-culturelle/.

⁴ Mike S. Schäfer *et al.*, « The Different Audiences of Science Communication: A Segmentation Analysis of the Swiss Population's Perceptions of Science and Their Information and Media Use Patterns », *Public Understanding of Science* 27, n° 7 (2018): 836-56, <https://doi.org/10.1177/0963662517752886>.

Un panel varié d'activités de médiation en mathématiques et leurs publics habituels

Le Mathscope et le G-EM proposent un panel varié d'activités de médiation mathématique, somme toute assez classiques : ateliers pour les classes, conférences grand public, clubs de maths mixte et pour les jeunes filles, expositions, festivals, ainsi que camps et week-ends d'initiation à la recherche pour les jeunes filles. Tous nos formats privilégient un contact direct avec le public : ainsi, même les expositions — grâce aux visites guidées — et les conférences — suivies d'un échange avec le public et un invité, puis d'un apéritif — sont conçues pour favoriser le dialogue. Mais parvient-on réellement à toucher un large public ?

Afin d'analyser le public touché, nous nous appuyons sur la typologie proposée par Schäfer *et al.*⁵, qui distingue quatre segments de public, résumés comme suit :

- **Les Sciencephiles** : Enthousiastes et confiants, ils soutiennent et veulent participer à la science.
- **Les Intéressés critiques** : Informés et engagés, mais plus prudents et exigeants envers la science.
- **Les Soutiens passifs** : Favorables mais peu impliqués avec un intérêt modéré.
- **Les Désengagés** : Peu intéressés et méfiants, la science compte peu pour eux.

Segment	Sciencephiles	Intéressés critiques	Soutiens passifs	Désengagés
Intérêt	Très élevé	Élevé	Modéré	Très faible
Confiance	Très élevée	Moyenne	Moyenne	Faible
Attitude envers la recherche	Soutien fort, sans restriction	Soutien, mais avec garde-fous	Favorables, mais sans enthousiasme	Soutien limité, plutôt critiques
Rapport à l'information scientifique	S'informent activement, veulent participer	Veulent être informés et impliqués	Peu d'initiative pour s'informer	Ne s'informent presque pas

Fig. 1. Tableau comparatif des segments

Bien que nous souhaitions, dans l'idéal, toucher l'ensemble de la population avec nos activités, il apparaît clairement que celles-ci attirent principalement des *Sciencephiles* et des *Intéressés*

critiques. Nous parvenons occasionnellement à atteindre des *Soutiens passifs*, souvent lorsque les activités proposées s'éloignent du cadre strictement mathématique. Les thématiques transversales — par exemple celles qui articulent les mathématiques à l'art, à la littérature ou à la vie quotidienne — ainsi que les actions menées dans des lieux publics ou inattendus, favorisent cette rencontre. En revanche, il demeure très difficile de mobiliser les *Désengagés*, peu familiers ou peu enclins à s'intéresser à la science, même de manière indirecte.

Activité	Description du public	Segments touchés
Ateliers pour les classes	Classes inscrites par leur enseignante. Élèves de 4 à 20 ans. Les élèves sont un public captif, mais les enseignants qui viennent sont convaincu-es de l'utilité des mathématiques.	<u>Enseignant-es</u> : principalement <i>Sciencephiles</i> , avec une proportion d' <i>Intéressés critiques</i> , notamment parmi les enseignant-es primaires <u>Élèves</u> : tous les segments
Conférences grand public	Personnes intéressées par le sujet et qui font l'effort de venir à une conférence à 18h30. (A Genève, cela constitue un public non négligeable.)	<i>Sciencephiles</i> et parfois <i>Intéressés critiques</i> lorsque la thématique est transverse
Clubs de math mixte et pour les jeunes filles	Élèves motivé-es en maths, la plupart du temps inscrites par leurs parents.	<i>Sciencephiles</i>
Expositions	Passionnés de sciences et familles avec enfants. Public attiré par la composante transversale (maths et art, maths et littérature) ou par le lieu ; permet de toucher un public plus varié.	<i>Sciencephiles</i> , <i>Intéressés critiques</i> , et quelques <i>Soutiens passifs</i> , voire des <i>Désengagés</i> , attirés par le lieu ou la thématique transverse.
Festivals	Passionnés de sciences et familles avec enfants. Lorsqu'il se déroule dans un lieu public : gens de passage que l'on parvient à intriguer avec un défi ou une curiosité. Lorsque l'on participe à un festival sur un thème autre que les sciences : public varié du festival.	<i>Sciencephiles</i> , <i>Intéressés critiques</i> (surtout parmi les parents qui souhaitent que leurs enfants apprennent des choses). <i>Soutiens passifs</i> parmi les gens de passage ou lorsqu'on participe à un festival sur un thème non scientifique
Camps et week-ends pour jeunes filles	Jeunes filles attirées par les sciences et les maths en particulier, et parfois amies de ces jeunes filles	<i>Sciencephiles</i> et <i>Intéressés critiques</i> . Quelques <i>Soutiens passifs</i> parmi les amies des <i>Sciencephiles</i> .

Fig. 2. Tableau de nos activités avec le public touché

⁵ Schäfer *et al.* (2018).

Comment toucher les segments moins engagés ?

L'analyse des situations dans lesquelles on observe une présence ponctuelle de *Soutiens passifs*, voire de *Désengagés*, met en évidence certains facteurs favorables : la dimension interdisciplinaire, la convivialité du cadre, ou encore la possibilité d'une approche participative.

Ces constats invitent à s'interroger sur les conditions à réunir pour élargir encore le spectre des publics, et notamment pour impliquer davantage les *Soutiens passifs*, voire atteindre les *Désengagés*. Cette réflexion s'inscrit dans une démarche plus large de démocratisation de la culture scientifique, en cohérence avec les bonnes pratiques de médiation culturelle, prônant l'accessibilité, la co-construction et la rencontre dans les lieux fréquentés régulièrement par les publics eux-mêmes.

Il est aussi essentiel de comprendre qui sont ces personnes. Dans l'article précédemment cité⁶, sont indiquées des caractérisations supplémentaires sur ces publics (voir Fig. 3.) On y trouve principalement des personnes éloignées des sciences (indice compris entre 0.6 et 1.3 sur 4⁷) et dont la majorité n'a pas suivi une formation tertiaire.

	Sciencephiles (n=292)	Intéressés critiques (n=181)	Soutiens passifs (n=437)	Désengagés (n=141)
Sociodémographie				
Éducation (% formation tertiaire dans l'échantillon)	58.5 ^{ad}	58.8 ^{be}	35.0 ^{abc}	17.3 ^{cde}
Proximité avec la science (indice : 0–4) ⁸	2.20 ^{ad}	2.06 ^{be}	1.28 ^{abc}	0.69 ^{cde}

⁶ Schäfer *et al.*, (2018).

⁷ L'indice, compris entre 0 et 4, reflète la proximité des répondant·es avec la science. Les scientifiques se voyaient attribuer directement 4 points. Pour les autres, un point était ajouté pour chaque critère rempli : connaissance personnelle d'un·e scientifique, membre de la famille ayant étudié à l'université, ou contact avec la science dans le cadre professionnel. Librement adapté de Schäfer *et al.* (2018).

⁸ Cf. note 7.

Autres contacts avec la science et la recherche (1 = « jamais » ... 5 = « très souvent »)				
Visiter des musées et expositions sur la science et la recherche	2.81 ^{ad}	2.76 ^{be}	2.35 ^{abc}	1.82 ^{cde}
Assister à des événements conférences discussions sur la science et la recherche	2.50 ^{ad}	2.47 ^{be}	1.90 ^{abc}	1.34 ^{cde}
Motivations à s'intéresser à des contenus scientifiques (1 = « pas du tout important » ... 5 = « très important »)				
Parce que je suis curieux·euse	4.47 ^{ad}	4.30 ^{be}	3.65 ^{abc}	2.63 ^{cde}
Pour pouvoir participer lorsque d'autres parlent de science et de recherche	3.49 ^{acd}	3.10 ^{ce}	2.90 ^{ab}	2.10 ^{bde}

Moyennes d'une même ligne avec exposants identiques : différences significatives, $p < 0,05$, test post hoc de Scheffé⁹

Fig. 3. Extrait du tableau « Description additionnelle des segments » (Schäfer *et al.* 2018)

Par ailleurs, plusieurs études et témoignages montrent que certains publics, notamment ceux que l'on désigne comme « *publics éloignés* » — c'est-à-dire socialement ou culturellement marginalisés — internalisent des barrières psychologiques à leur participation : « ce n'est pas pour moi », « je ne suis pas assez formé·e/intelligent·e ». Cela les dissuade souvent de s'engager dans des événements organisés dans les lieux institutionnels de la science ou de la culture.

Pour les *Soutiens passifs* et les *Désengagés*, il s'agira dès lors de proposer des événements dans des lieux qu'ils fréquentent. Cette démarche est aussi mentionnée dans les « Six bonnes pratiques en médiation culturelle », édictées par l'Observatoire romand de la culture (cf. note 3), sur la base du mémoire de Belinda Ucar¹⁰.

Quatre formats pour faire un pas de côté

(R)amène ta science. Au ScienScope de l'UNIGE (cf. note 1), nous avons été sollicités par le Service des classes d'accueil du secondaire II (ACCES II)¹¹,

⁹ <https://stattrek.com/anova/follow-up-tests/scheffe>.

¹⁰ Belinda Ucar, « Médiation culturelle : pratiques d'accompagnement et bonnes pratiques » (Mémoire de master, Université de Lausanne, 2024), www.observatoire-culture.ch/wp-content/uploads/2024/12/Belinda-Ucar_Memoire_VF_171024_compressed-1.pdf.

¹¹ Service du Département de l'Instruction Publique genevois accueillant des élèves allophones afin de les préparer à intégrer une filière professionnelle ou un cursus scolaire standard.

afin de proposer un format susceptible d'impliquer des jeunes migrant-es de 15 à 20 ans. Nous avons retenu un dispositif imaginé par le Dr Didier Perret, ancien directeur du Chimiscope, qui proposait aux écoles de les aider à organiser leur fête de la science, en formant des élèves-médiateur-ices sur des activités spécialement conçues à cet effet.

Ainsi, depuis mai 2025, à raison d'une édition par an, nous recrutons des élèves motivé-es dans les classes ACCES II, que nous formons sur des ateliers spécifiques, qu'ils et elles présentent ensuite à leurs camarades lors d'une journée de médiation. La formation, d'une durée d'environ trois heures, vise l'appropriation d'une activité scientifique, mais aussi d'un savoir-faire en médiation. Durant la dernière édition, les élèves ont ainsi découvert les jeux de Nim et le jeu du Domineering. Une fois certaines stratégies gagnantes maîtrisées, ils et elles ont pu accueillir leurs pairs sur des stands de jeux. Leur rôle était alors de retransmettre les règles des jeux et de faciliter la découverte des stratégies par leurs camarades.



Fig. 4. Les élèves-médiateur-ices et leurs camarades lors de (R)amène ta science 2025.

En accord avec les bonnes pratiques de la médiation culturelle (cf. note 3) — co-construction,

reconnaissance des savoirs expérientiels et accessibilité —, ce dispositif favorise la retransmission par les pairs, permettant de toucher des jeunes migrant-es souvent éloigné-es de la culture scientifique pour des raisons sociales et institutionnelles. Il contribue ainsi à renforcer leur rôle d'acteurs et d'actrices de la diffusion scientifique, tout en favorisant un apprentissage mutuel. En outre, les élèves-médiateur-ices développent une certaine fierté et se sentent ainsi plus légitimes à parler de science.

Il y a cependant un point faible à ce dispositif qui se situe dans le temps limité de l'appropriation. Celui-ci se répercute sur la qualité du savoir transmis. En effet, surtout lors des premières présentations, il y a des approximations, parfois grossières, des mathématiques qui sous-tendent l'activité, et l'encadrant-e est alors amené à intervenir.

Création collective dans une exposition. Les expositions créées par le G-EM intègrent de nombreux éléments favorisant l'interaction et invitant les visiteur-euses à s'approprier les concepts mathématiques par la manipulation.

Dans certains cas, la médiation va plus loin : nous sollicitons une participation active du public, sous la forme d'une contribution concrète nécessitant la compréhension de certains principes présentés. Pour beaucoup, le fait d'« apporter sa pierre à l'édifice » constitue une motivation puissante, entraînant aussi un temps de présence prolongé dans l'exposition.

L'exemple le plus marquant est celui de *Plongée dans le monde des fractales*¹², dont la pièce centrale était un cube de Menger géant assemblé à partir de cartes de visite.

Cette démarche, à la croisée de l'art et des mathématiques, associait un objectif collaboratif (terminer la structure avant la fin de l'exposition) à une expérience esthétique et collective, créant une dynamique d'engagement remarquable.

¹² Genève, Salle d'exposition de l'UNIGE, 17 mai–30 juillet 2021 : <https://www.unige.ch/cite/evenements/exposition/expositions-passees/fractales>.



Fig. 5. Le cube de Menger en construction lors de l'exposition *Plongée dans le monde des fractales*.

Ce type de dispositif favorise la collaboration non hiérarchisée, chacun pouvant contribuer, quelle que soit sa maîtrise des notions mathématiques, tout en stimulant la curiosité et le sentiment d'appartenance à un projet commun. Il mobilise principalement des *Sciencephiles* et des *Intéressés critiques*, séduits par le défi, et attire ponctuellement des *Soutiens passifs* par la dimension visuelle et participative du projet. Ce format illustre plusieurs des bonnes pratiques — en particulier la co-construction, la valorisation des savoirs expérientiels et la création de lien social par la participation collective. L'enjeu n'est pas seulement la transmission de connaissances, mais la création d'un espace partagé où les mathématiques deviennent une expérience sensible et inclusive.

Le Carré du Diable. Les projets de science participative en mathématiques demeurent rares, les contraintes propres à la discipline — abstraction, technicité, faible ancrage dans le quotidien — rendant difficile l'implication directe du public. À l'occasion du Pi-Day 2024¹³, nous avons toutefois pu expérimenter une approche originale, invitant les participant·es à contribuer concrètement à un problème de recherche encore ouvert.

L'activité s'appuie sur un défi combinatoire publié dans la célèbre colonne de Martin Gardner : construire, à l'aide des douze pentaminos¹⁴ existants, un enclos de la plus grande aire possible. Si le maximum théorique absolu (128 unités) est

connu, les valeurs maximales associées à certaines configurations restent indéterminées.

Grâce à l'application développée par Dr Erika Roldan et son équipe, les participant·es peuvent jouer en ligne ou à l'aide d'un jeu physique. La surface obtenue pour une configuration est calculée automatiquement ; si elle dépasse les records connus, elle est enregistrée dans la base de données internationale du projet. Le but du jeu — construire l'enclos le plus grand possible — est très intuitif. En revanche, le lien entre cette activité ludique et la contribution à la recherche scientifique nécessite un accompagnement pour être perçu : il s'agit de comprendre que chaque essai, même infructueux, enrichit la connaissance collective du problème. Ce dispositif attire toutefois principalement des *Sciencephiles* et des *Intéressés critiques* disposant de la patience nécessaire pour tester différentes configurations et séduits par la possibilité d'apporter leur contribution.



Fig. 6. Le dispositif du Carré du Diable.

Ce projet illustre la possibilité d'une science participative en mathématiques. Il met en lumière les atouts d'une telle approche — ludification, engagement intellectuel, contribution réelle — tout en révélant ses limites : la nécessité d'un accompagnement pour expliciter la portée scientifique et la difficulté à élargir le public au-delà des segments déjà sensibilisés à la culture scientifique, ainsi que le choix restreint de problèmes se prêtant à cette démarche.

¹³ <https://www.erikaroldan.net/deficarredudiable>.

¹⁴ Un pentamino est une figure géométrique formée par l'assemblage de cinq carrés identiques reliés par leurs côtés. Il

en existe douze formes différentes, souvent utilisées dans des jeux de construction, de pavage ou de résolution de problèmes géométriques et combinatoires.

Maths et musique dans les bars. Dans une volonté de toucher les publics dans leurs lieux de sociabilité, nous développons le projet *Maths et musique dans les bars*. L'idée s'inspire du concept de *Pint of Science*, né en 2012 au Royaume-Uni¹⁵, qui vise à rapprocher chercheur·euses et grand public dans les bars. À Genève, toutefois, l'événement se déroule souvent dans des salles séparées, fréquentées uniquement par des personnes déjà informées, perdant ainsi la spontanéité du concept initial.

Avec ce projet, nous voulons réussir à nous insérer dans un lieu convivial sans effrayer le public : les interventions se veulent plutôt courtes, directement dans l'espace du bar, et pouvant ensuite se poursuivre en discussions et activités avec les spécialistes présent·es... ou pas.

Une campagne de communication préalable, à base de sous-bocks et sets de table, proposera jeux, questions ou anecdotes liant musique et mathématiques, afin d'éveiller la curiosité des habitué·es. L'événement prendra la forme de mini-conférences informelles animées par mathématicien·nes et musicien·nes, centrées sur des notions telles que *tempérament*, *triton* ou *harmonie*, ponctuées de petites expériences ou jeux de table, et accompagnées de boissons thématiques créées pour l'occasion. Pour cette première édition, nous ciblerons des bars fréquentés par un public étudiant, avant d'envisager des lieux plus éloignés du milieu académique.

Ce projet vise à réduire la distance symbolique entre science et vie quotidienne, en proposant une médiation intégrée aux pratiques culturelles ordinaires. Il répond aux bonnes pratiques de la médiation culturelle définies par l'Observatoire romand de la culture — notamment la rencontre dans les espaces de vie et l'adaptation aux publics — et cherche à toucher non seulement les *Sciencephiles* et *Intéressés critiques*, mais aussi les *Soutiens passifs* et, à terme, les *Désengagés*.

Co-crédation d'une exposition avec des classes. Nous avons obtenu un financement Agora du

Fonds national suisse (SNSF)¹⁶ pour créer une exposition interactive et des ateliers de médiation autour des recherches de Hugo Duminil-Copin et Stanislav Smirnov sur la percolation et les marches auto-évitantes.

Le projet repose sur un processus de co-crédation entre chercheurs, médiateur·ices et enseignant·es et leurs élève·s. Le processus débute par un exposé scientifique auprès d'une classe, menée par un·e chercheur·se, suivie d'un travail d'appropriation par la classe encadrée par l'enseignant·e. Dans un second temps, une rencontre avec les médiateur·ices permet de transformer les idées issues de ce travail en prototypes d'activités ou de manipulations qui seront intégrées à l'exposition finale.

Ce processus de création collective s'étalera sur deux ans. Les classes participantes concevront progressivement des éléments de l'exposition qui sera accueillie par le Département de l'instruction publique (DIP). L'exposition sera ensuite accompagnée de visites guidées destinées aux écoles.

Le projet illustre pleinement les bonnes pratiques de la médiation culturelle : co-construction, valorisation des savoirs expérientiels, décentralisation et rencontre dans les espaces de vie. Il vise à renforcer l'appropriation des savoirs scientifiques par les jeunes et à redistribuer la légitimité de la production de contenu. Il constitue ainsi un exemple de dévolution du savoir mathématique vers le public.

Conclusion

L'ensemble des dispositifs présentés montre la diversité des approches possibles pour élargir le public de la médiation mathématique. Pour les publics déjà touchés — Les *Sciencephiles* et les *Intéressés critiques* — la variation des formats et des lieux constitue un moyen d'attirer de nouvelles tranches d'âge ou de favoriser une participation plus équilibrée entre les genres. L'effort d'horizontalité est globalement apprécié : il répond à une attente de participation active de la

¹⁵ « Pint of Science: Bringing Scientific Research to Pubs », *El-lipse*, 13 septembre 2019, <https://ellipse.prbb.org/pint-of-science-bringing-scientific-research-to-pubs/>.

¹⁶ Subsidies soutenant les projets de médiation scientifique en lien avec la recherche actuelle et qui permettent le dialogue avec le public : <https://data.snf.ch/grants/grant/231095>.

part du public, sans pour autant exclure les formats plus classiques, qui restent bien reçus.

L'un des enjeux majeurs pour atteindre les *Soutiens passifs* et les *Désengagés* réside dans la délocalisation des activités vers des lieux familiers où ces publics se sentent légitimes et à l'aise. Le projet *Maths et musique dans les bars* constitue à cet égard un premier pas concret vers une médiation qui va à la rencontre du public dans son environnement quotidien.

Dans le cas des dispositifs de co-création, comme le projet Agora, l'enjeu dépasse la simple participation : il s'agit de permettre au public scolaire de prendre confiance dans sa capacité à manipuler, interpréter et transmettre des notions mathématiques. Cette appropriation peut à terme encourager une autonomie vis-à-vis du cadre institutionnel, en donnant aux participant·es le sentiment que la recherche leur appartient aussi.

La mise en lien avec la recherche actuelle demeure d'ailleurs un défi central. Il s'agit de trouver un équilibre entre la fidélité aux contenus

scientifiques et la création d'un cadre de médiation accessible. Les dispositifs présentés offrent l'occasion de montrer que les mathématiques débordent du programme scolaire, tout en gardant un ancrage rigoureux dans la recherche actuelle — un enjeu que le projet Agora place au cœur de sa démarche. Enfin, ces expériences invitent à repenser la place de la médiation dans le tissu éducatif et culturel local. Sortir de l'université, co-créer avec les acteurs·ices du terrain et développer un réseau de confiance entre chercheur·ses, médiateur·ices et public permet de replacer l'humain au centre des dispositifs de médiation. Cette translation ouvre la voie à une médiation mathématique plus inclusive et collaborative.

Nous nous réjouissons de la poursuite et mise en place de ces projets au cours des années à venir et espérons parvenir à toucher à travers ces nouveaux lieux et formats un public différent.

Si vous êtes intéressé·es, n'hésitez pas à nous contacter pour mettre en place des collaborations !

Université de Genève, Section de Mathématiques, Rue du Général-Dufour 24, 1211 Genève 4.

Email : Elise.Raphael@unige.ch

Website : <https://www.unige.ch/math/la-section/enseignants-et-chercheurs/elise-raphael>

ORCID: 0000-0002-7889-1443



Elise Raphael : Après un doctorat en mathématiques très abstraites, elle consacre à présent plus de temps à la médiation en mathématiques et co-dirige le Genève Evasions Mathématiques.

Elle est également coordinatrice scientifique de la SRS (Station de Recherche SwissMAP) aux Diablerets, qui accueille chaque année une vingtaine de conférences en mathématiques et physique théorique.

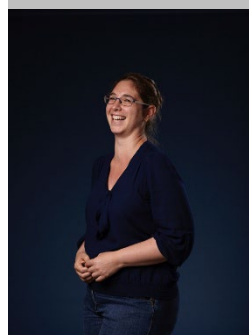
Photo credentials: Julien Gaspoz © G-EM

Université de Genève, Section de Mathématiques, Rue du Général-Dufour 24, 1211 Genève 4.

Email : Shaula.Fiorelli@unige.ch

Website : <https://www.unige.ch/math/la-section/enseignants-et-chercheurs/shaula-fiorelli>

ORCID: 0000-0001-6525-9206



Shaula Fiorelli : Docteure en géométrie énumérative réelle, elle travaille à la Section de mathématiques de l'Université de Genève, où elle coordonne les activités de médiation scientifique, notamment au sein du Mathscope, laboratoire de découverte des mathématiques.

Elle a participé à de nombreux événements publics (Nuit de la science, Nuit des musées, L'Oreille des Kids), conçu une

exposition sur Léonard de Vinci et interprété le rôle de policière scientifique dans la pièce *Mystère au manoir moutarde*, présentée à plus de 2'500 élèves genevois. Ses intérêts portent aujourd'hui sur la didactique des mathématiques appliquée à la vulgarisation.

Photo credentials: © SwissMAP

BRIEF AN EINEN JUNGEN MENSCHEN, DER PLANT, MATHEMATIK ZU UNTERRICHTEN

Armin P. Barth (ETH Zürich)

Ich liebe die Mathematik, seit ich damals die erste Klasse des Gymnasiums besuchte, und ich habe das Fach nun fast vierzig Jahre lang mit grosser Freude und Befriedigung unterrichtet. Meine Lehrer – In meinem Fall waren es ausschliesslich Männer – müssen offenbar einiges richtig gemacht haben. Daher halte ich es für interessant zu erforschen, was es denn war, das mich damals zu einem lebenslangen Fan gemacht hat, und es Dir, der Du planst, Mathematik zu unterrichten, mit auf den Weg zu geben.

Anfänge

Am Gymnasium hatte ich das Glück, von einem Lehrer unterrichtet zu werden, der nach jeder Deutung des Wortes ein grosser Mensch war: Walter Senft. Er war sehr gebildet und konnte die Mathematik in einen grösseren Zusammenhang stellen. Er lehrte uns Ideen und nicht einfach Rechenregeln, er zeigte uns Hintergründe, Querbezüge und Anwendungen. Die Mathematik hörte auf, eine Disziplin zu sein, sie wurde zu einer Art, die Welt zu sehen. Das hat mich ein Leben lang geprägt; noch heute sehe ich die Welt durch die Linse mathematischen Denkens. Leider verstarb Walter zu Beginn dieses Jahres – immerhin aber im 98. Lebensjahr und nach einem langen, erfüllten Leben, in dem die Liebe zur Mathematik immer eine Rolle gespielt hat.

Als ich mich später für ein Studium entscheiden wollte, informierte ich mich mit den damals üblichen (analogen) Infomappen, die es zu jeder Studienrichtung gab. In der Mathematik-Mappe stand unter anderem, dass man mit mathematischen Methoden beweisen könne, dass gewisse Dinge nicht beweisbar sind. Dieser Satz schlug bei mir mit der Wucht des Urknalls ein, und noch heute höre ich sein Rauschen. Es war um mich geschehen, ich wollte unbedingt erfahren, wie so etwas Verrücktes möglich ist.

Nun ist es häufig so, dass Dinge faszinierend klingen, weil man sie nicht genau versteht, und dass die Faszination abklingt, wenn man sie ganz und

gar durchdrungen hat. In der Mathematik ist das nicht so. Später kniete ich mich so lange in das Halteproblem (Turing 1936), die busy-beaver-Funktion (Radó 1962), das Korrespondenzproblem (Post 1947), die NP-Vollständigkeit von SAT (Cook, 1971), die Unvollständigkeitssätze (Gödel 1931) und viele andere Probleme, bis ich jedes Detail verstand, und siehe da: Die Faszination wuchs noch, ich erschauerte ob der Genialität von Hirnen, die sich solche Beweise ausdachten.

Im Studium hatte ich das Glück, von Koryphäen unterrichtet zu werden. Stark beeinflusst haben mich der Logiker Ernst Specker (1920 – 2011) und natürlich Volker Strassen (*1936). Strassen war nicht nur überaus unterhaltsam, er lehrte uns zu denken. Mathematik entstand vor unseren Augen in dem Moment, als er sie vor uns betrieb, sie wurde lebendig, greifbar, tiefgründig, aktuell. 1977 erschuf er zusammen mit Solovay den Solovay-Strassen-Primzahltest, und nur wenige Jahre später konnten wir in seiner Vorlesung damit arbeiten. 1969 bewies er, dass der klassische $O(n^3)$ -Algorithmus zur Matrixmultiplikation nicht optimal ist, und in meinem Studium konnten wir mitfiebert, wie Strassen, Pan, Schönhage, Winograd, Coppersmith und andere daran arbeiteten, den Exponenten in Richtung 2 zu senken – eine Jagd, die spannender war als jeder Thriller und jedes heutige Computerspiel.

Klar, ich war überaus empfänglich für all dies, und natürlich darf man nicht voraussetzen, dass alle Schülerinnen und Schüler diese Bereitschaft mitbringen. Dennoch kannst Du, wenn Du bald Mathematik unterrichten wirst, viel daraus lernen. Und ich gehe so weit zu behaupten, dass das, was Du daraus lernen kannst, wichtiger ist als alles, was Du in Vorlesungen über Lehren und Lernen hören wirst (auch wenn Erkenntnisse aus solchen Vorlesungen sehr bedeutsam sind).

Was lernst Du daraus?

Zunächst einmal lernst Du daraus, dass ein Thema nicht deswegen unterrichtet werden

sollte, weil es als nächstes im Lehrplan steht, sondern weil es interessant und bedeutsam ist, vielleicht sogar aktuell, weil es Konzepte thematisiert, die breit anwendbar sind, weil Ideen und Argumente erprobt werden können, die typisch für das Fach sind, weil es Aspekte enthält, die schön und erst noch praktisch sind. Frage Dich stets, welche wirklich überzeugenden Gründe es dafür gibt, dass Du und Deine Klasse nun gleich 45 Minuten lang an einem bestimmten Thema arbeiten sollen, und finde diese Gründe niemals in Lehrplänen, der Schulbesuchspflicht oder anderen Formalitäten.

Zweitens: Nutze ein Thema immer auch, um die Bedeutung der Mathematik in der heutigen Welt deutlich zu machen, zeige Hintergründe, Querbezüge und Anwendungen. Mach die Mathematik lebendig und greifbar, präsentiere nicht nur ihre fertigen Erkenntnisse, sondern zeige, wie diese entstehen. Zeige, wie Probleme angepackt werden, wie typisches mathematisches Argumentieren funktioniert, wie Vermutungen aufgestellt und allenfalls verworfen werden, wie Beweisführungen ablaufen. Ermögliche Deinen Schülerinnen und Schülern originale Begegnungen, lass sie über die Schultern der grossen Mathematikerinnen und Mathematiker schauen. Wie bestimmte Euklid den ggT zweier Zahlen? Warum musste Claudius Ptolemäus, um Astronomie zu betreiben, eine Tabelle von Sehnenlängen errechnen? Mit welcher genialen Idee hat Tartaglia die Auflösungsformel für die kubische Gleichung gefunden? Warum konnte die Erfindung von John Napier in gewissem Sinne die Lebensspanne verdoppeln? Wie hat es Cavalieri geschafft, Volumina zu berechnen? Warum war Leibniz so sehr an Tangentensteigungen interessiert? Wie hat Leonhard Euler die Summe der reziproken Quadratzahlen bestimmt? Wie hat Ada Lovelace Programme für die ersten mechanischen Computer entworfen? Wie haben Cauchy, Riemann und andere das Integral verstanden? Inwiefern hat Emmy Noether die moderne Algebra mitbegründet? Was hat Strassens Primzahltest mit Monte Carlo zu tun? Es ist fast unmöglich, sich der Faszination zu entziehen, die die grossen Ideen der Menschheit verströmen, wenn man ihnen die verdiente Bühne gibt.

Nebenbei bemerkt: Es ist zwingend, dass Du Dich auch Quellen widmest, die älter sind als das Internet. Wenn Du beispielsweise etwas über

Mengenlehre nachlesen möchtest, findest Du im Internet eine überwältigende, erdrückende Menge an Seiten zum Thema, so erdrückend, dass man versucht ist, nur den ersten paar Links zu folgen. Dass es aber eine grossartige Einführung von Paul Halmos aus den 60er-Jahren gibt, geht in diesem Wirrwarr unter. Natürlich findet man das PDF dieses Buches, wenn man danach sucht, aber Du musst wissen, dass es existiert, bevor die Internetsuche beginnt. Darum lege ich Dir das Studium von auch älteren Büchern und Artikeln sehr ans Herz.

Und drittens: Scheue nie davor zurück, Deine eigene Begeisterung für die mathematischen Inhalte zu zeigen. Im Gegenteil: Erzähle den Jugendlichen, was Dich an Mathematik besonders fasziniert, was Deine «Urknall-Momente» waren, was aus Deiner Sicht wichtig an dem aktuellen Thema ist. Suche in der Mathematik eine Quelle der Inspiration und Begeisterung und halte sie ein Leben lang am Laufen. Jugendliche sind meist sehr offen und begeisterungsfähig. Bedenke, dass Deine Art, die Welt zu sehen, für sie neu und teils fremd ist. Aber im besten Fall ist sie auch attraktiv und manchmal gar wegweisend. Du öffnest für sie die Tür in eine faszinierende Welt, die ihnen bislang verschlossen war. Im schlechten Fall hatten sie bisher einen modrigen, abtossenden Geruch hinter dieser Tür vermutet, aber dank Deinem Unterricht revidieren sie diese Vermutung nun vielleicht und betreten die neue Welt mit Neugier oder gar mit Faszination.

Wenn Du Dir all das, was ich bisher gesagt habe, zu Herzen nimmst, wirst Du automatisch vieles richtig machen. Du wirst für ein angenehmes Klassenklima sorgen, in dem sich alle wohl fühlen, weil es Dir als Anwalt oder Anwältin der Mathematik wichtig ist, möglichst viel Gutes zu bewirken. Du wirst abwechslungsreichen Unterricht bieten, weil es Dir wichtig ist, allen möglichen Aspekten der Mathematik eine Bühne zu bereiten. Du wirst zahlreiche besonders lernförderliche Unterrichtssituationen schaffen, weil es Dir wichtig ist, die Jugendlichen für das Fach zu gewinnen und sie möglichst gut vorzubereiten auf aktuelle und künftige Herausforderungen.

Obwohl Du nun automatisch vieles richtig machen wirst, kannst Du Deinen Unterricht noch professionalisieren. Dabei helfen Dir die Erkenntnisse der modernen Lehr/Lernforschung.

Studien und ihre Gefahren

Die Lehr/Lernforschung gewinnt ihre Erkenntnisse meist aufgrund von Studien. Natürlich haftet diesen Erkenntnissen nicht die Unumstösslichkeit mathematischer Beweise an, und oftmals werden Studien auch mangelhaft umgesetzt. Zum Beispiel kommt es vor, dass in einer Korrelationsstudie (die den Zusammenhang zwischen zwei quantifizierbaren Merkmalen untersucht) aus einer hohen Korrelation auf eine Ursache-Wirkung-Beziehung geschlossen oder dass eine dritte Variable übersehen wird, die gemeinsame Ursache beider Parameteränderungen ist. Oder es kommt vor, dass in einer quasi-experimentellen Studie schon bestehende Gruppen verwendet werden und dabei Selektionseffekte übersehen werden. Oder es kommt vor, dass in einer experimentellen Vergleichsstudie die beiden Gruppen bezüglich kognitiver Fähigkeiten oder sozio-ökonomischem Status nicht gleich zusammengesetzt sind. Und so weiter. Wenn die Studie aber wissenschaftlich sauber gemacht, seriös überprüft und prominent publiziert ist, und wenn es eine Vielzahl gut gemachter Studien gibt, die zu ähnlichen Schlussfolgerungen gelangen, dann wäre es unklug, Du würdest Dir diese Schlussfolgerungen nicht zu Herzen nehmen.

Vorwissen und Misskonzepte

Eine der zentralen Erkenntnisse der modernen Lehr/Lernforschung ist, dass schulisches Lernen ein schrittweiser Wissens- und Verstehensaufbau auf einer Basis von Vorwissen ist. Vorwissen ist einer der wichtigsten Prädiktoren für schulischen Erfolg. Schon die bekannte Schachstudie (Chase & Simon, 1973), in der Stellungen auf Schachbrettern studiert und dann auf einem leeren Brett rekonstruiert werden mussten, zeigte, dass Schachprofis bei zufälligen (aber erlaubten) Stellungen gleich schlecht abschnitten wie Laien, dass sie aber bei realen Stellungen (die aus einer Partie erwachsen) deutlich besser abschnitten als Laien, weil sie auf gut gebündeltes Vorwissen aus zahlreichen analysierten Partien zurückgreifen konnten.

Untersuchungen dieser Art legen die Vermutung nahe, dass Expertinnen und Experten ihr Wissen in grösseren zusammenhängenden Einheiten («Chunks») ablegen und besonders effizient darauf zugreifen können – und dass Wissenserwerb domänenspezifisch ist, dass also durch Experten-

wissen in einem Bereich nicht das Denken ganz allgemein verbessert werden kann. Für Dich als Lehrerin oder Lehrer bedeutet dies, dass Du vor jedem Thema, aber auch vor jeder kleineren Einheit analysieren solltest, ob die Lernenden über das nötige Vorwissen verfügen, um die neuen Inhalte daran anzudocken. Vorwissenschecks sind ein probates Mittel dafür, aber auch kurze Repetitionen oder Zusammenstellungen des nötigen Vorwissens. Denn wenn Jugendliche neue Inhalte nicht verstehen, ist es oft einfach so, dass das nötige Vorwissen nicht präsent genug ist. Intelligenz im Sinne des IQ ist wichtig bei Themen, die eine besonders hohe Komplexität und Abstraktion aufweisen, aber an Schulen sind sehr oft Unterschiede im Vorwissen verantwortlich für Unterschiede in der Leistung. Nicht umsonst betont die renommierte Lehr/Lernforscherin Elsbeth Stern immer wieder, dass Intelligenz weniger relevant ist, wenn Wissen erworben worden ist.

Eine weitere Hürde, die Du meistern musst, sind Misskonzepte, die erfolgreiches Lernen erschweren oder verhindern. Nehmen wir Hugo, einen fiktiven Schüler. Wie viele Menschen ist er der Überzeugung, dass durch Aufaddieren von unendlich vielen positiven Zahlen zwingend Unendlich herauskommen muss. Extrapolationen von Alltagserfahrungen suggerieren das ja auch: Wenn ich auf einen Stapel von Jasskarten immer wieder eine oder mehrere Karten drauflege und niemals damit aufhöre, wird der Stapel sicher höher werden als jede beliebige Zahl von Metern. Dies aber unzulässig zu verallgemeinern, wäre fatal. Denn wenn ich mit 1 beginne und dann $\frac{1}{2}$ addiere und dann $\frac{1}{4}$ und dann $\frac{1}{8}$ und dann $\frac{1}{16}$ und so weiter, werde ich nie die Zahl 2 übersteigen, obwohl es unendlich viele positive Summanden sind. Tatsächlich ist diese Erkenntnis fundamental für die Mathematik. Eulers weiter oben erwähnte Summe der reziproken Quadratzahlen würde nicht konvergieren, wenn Hugo recht hätte. Und Hugo hätte grosse Mühe, die Grundlagen der Integralrechnung zu lernen, weil er nicht verstehen würde, wie die Riemannsumme für wachsendes n konvergieren kann. Sein Misskonzept wäre lernhinderlich.

Ein Teil Deiner Arbeit wird also darin bestehen, allfällige Misskonzepte zu antizipieren, zu analysieren und hilfreiche Strategien dagegen zu planen. Wie kannst Du Hugo dabei helfen, sein Misskonzept zu überwinden? Und bitte rede Dir nie

ein, dass ein einmal überwundenes Misskonzept nie mehr auftaucht. Studien (zum Beispiel Shtulman & Valcarcel, 2012, 2021) zeigen, dass durch guten Unterricht Misskonzepte unterdrückt, aber nicht überschrieben werden. Verständnisvolle Unterstützung beim Kampf gegen Fehlvorstellungen wird also zu Deinen täglichen Aufgaben gehören.

Kognitive Aktivierung

Eine universitäre Vorlesung ist oft eine reine Instruktion; eine Person steht vorne und erklärt neue Inhalte. Wenn Du frisch von einer Universität kommst, könntest Du versucht sein, dieses Modell auf die Schule zu übertragen. Das wird fast immer scheitern. An einer Universität geht das (viel eher), weil die Studierenden älter sind, das Fach aus eigenem Antrieb gewählt haben und meist über eine hohe intrinsische Motivation verfügen. An Schulen – und das ist eine weitere zentrale Erkenntnis der Lehr/Lernforschung – solltest Du der Instruktion eine Erkundungsphase vorschalten, in der die Jugendlichen mit attraktiven Fragen konfrontiert werden, die auf die zentralen Punkte des neuen Themas abzielen. Gut gemacht, führt diese Phase zu einer kognitiven Aktivierung, und Du erreichst Dreierlei: Du kannst einen positiven Einfluss auf die Motivation der Lernenden ausüben. Du kannst ihnen die Grenzen ihres Wissens aufzeigen und somit das Bedürfnis nach neuem Wissen wecken. Und Du kannst ihnen Gelegenheit geben, neues Wissen eigenständig zu konstruieren.

Zahlreiche empirische Vergleichsstudien belegen, dass ein gut gemachter kognitiv aktivierender Einstieg lernwirksamer ist, als wenn der Stoff zuerst vermittelt und danach geübt wird. Die Kunst besteht allerdings darin, Einstiegsfragen so gut hinzubekommen, dass sie attraktiv und anregend, herausfordernd und doch lösbar für die Mehrheit einer Klasse und unbedingt passgenau auf den aktuellen Kenntnisstand der Lernenden abgestimmt sind. Ich habe für meine Buchreihe «Mathematik fürs Gymnasium» eine grosse Zahl solcher Einstiege entwickelt. Du wirst sehen, dass sich eine solche Intervention immer lohnt, und Dich erfreuen an den vielseitigen Ideen der Jugendlichen – und auch an ihren Fehlern, denn Fehler und deren Überwindung sind eine enorme Hilfe beim Erlernen neuer Stoffe.

Gute Erklärungen

Hast Du Deine Schülerinnen und Schüler auf das neue Thema vorbereitet, ihnen gezeigt, warum es wünschenswert wäre, neues Wissen zu generieren und ihnen vielleicht sogar die Gelegenheit gegeben, sich Teile davon selbst anzueignen, wirst Du irgendwann Erklärungen zu den neuen Inhalten liefern. Diese solltest Du sehr sorgfältig planen. Sie sollten in der Länge, der Wortwahl und der Komplexität gut auf das Zielpublikum abgestimmt sein. John Hattie spricht von der «teacher's clarity»; Du bemühst Dich also, klar und präzise zu sein und die zentralen Überlegungen auf den Punkt zu bringen.

Nehmen wir an, Du möchtest Hugo und seiner Klasse erklären, was eine Cauchyfolge ist. Die Versuchung ist gross, die Definition mit Epsilon und N hinzuschreiben. Aber diese «Erklärung» wäre nicht auf das Zielpublikum abgestimmt; die Jugendlichen würden auch nicht verstehen, warum dieses Konzept bedeutsam ist. Viel besser wäre es, Du würdest zuerst die Vorstellung erzeugen, dass Folgen manchmal in einen «Schlauch» eintauchen und diesen dann nie mehr verlassen. Das lässt sich auch sehr schön in einem *mental tool* visualisieren. Wenn es bei einer bestimmten Folge möglich ist, einen Schlauch von beliebig kleinem Durchmesser zu zeichnen und man trotzdem immer eine Stelle findet, ab welcher die Folge permanent in diesem Schlauch gefangen ist, dann spricht man von einer Cauchyfolge. Erst wenn diese Vorstellung geweckt und an Beispielfolgen besprochen und visualisiert worden ist, kannst Du die genaue Definition nachreichen und zeigen, dass sie die bisherige, etwas ungenaue Idee präzisiert. Und erläutern, warum dieses Konzept bedeutsam ist – weil man Konvergenz beweisen kann, ohne den Grenzwert schon zu kennen, oder weil man damit aus der Menge der rationalen Zahlen die Menge der reellen Zahlen konstruieren kann, und so weiter.

Ich hatte einst einen Praktikanten, der in der folgenden Lektion die Cauchyfolge einführen sollte. In der Pause davor tippte er unablässig auf seinem Handy herum. Auf meine Bitte, lieber im Kopf noch einmal seine geplanten Erklärungen durchzugehen, lachte er, legte sein Handy aber nicht weg. Und natürlich misslang seine Erklärung dann in der nachfolgenden Lektion. Das Beispiel zeigt: Wirklich gute Erklärungen zu geben, ist nicht einfach. Es braucht gute Planung, hohe

Konzentration, eine ernsthafte und tiefgründige Auseinandersetzung mit dem Stoff.

Anwendungen und Transfer

Jugendliche sind meist interessiert daran zu erfahren, wofür Dinge gebraucht werden, die sie in Mathematik lernen sollen. Das mag Fans der Mathematik wie Dir und mir etwas utilitaristisch vorkommen, ist aber verständlich. Bedenke, dass die Mehrheit der Klasse später nicht Mathematik studieren wird. Zeige also unbedingt spannende Anwendungen Deines Faches. Sei Dir aber bewusst, dass sich, wie man aus der Forschung weiss, Transfer in andere Inhaltsgebiete nicht automatisch einstellt. Transfer muss man gezielt fördern, indem man dieselbe Sprache spricht, wie sie in den anderen Inhaltsgebieten (MINT-Fächer, Medizin, Ökonomie, usw.) verwendet wird.

Konzeptsicherung

Eine weitere zentrale Erkenntnis der Lehr/Lernforschung ist, dass es nicht reicht, wenn die Lehrperson Dinge gut erklärt; sie muss vor allem dafür sorgen, dass die Jugendlichen für sich selbst Erklärungen generieren, zentrale Ideen in eigene Worte fassen, Vermutungen überprüfen, Fehler richtigstellen, Konzepte erläutern. Massnahmen, die dies fördern, könnte man unter dem Stichwort «Konzeptsicherung» zusammenfassen. Zahlreiche Studien belegen, dass solche Massnahmen zu einem tieferen Verständnis und überdies zu einem sichereren mathematischen Handwerk führen.

Du kannst dies auf vielfältige Weise umsetzen. Zum Beispiel kannst Du den Lernenden fehlerhafte Rechnungen, Herleitungen, Argumente vorlegen und sie auffordern, gut zu erklären, worin der Fehler besteht, und eine korrekte Version vorzuschlagen. (Ich hörte einmal einen Lehrer sagen, man dürfe Jugendlichen keinesfalls falsche Umformungen zeigen, weil sie dann eher dazu neigen, genau diese Fehler zu begehen. Das ist Unsinn, das Gegenteil trifft zu. Je besser Jugendliche erklären können, warum Falsches falsch ist, desto eher werden sie diesen Fehler vermeiden, die Forschung zeigt diesen Effekt sehr deutlich.) Oder Du lädst die Lernenden ein, zentrale Punkte des Stoffes sich selbst oder einem fiktiven Laien zu erklären. «Schreibe einen kurzen Text, in dem Du gut erklärst, warum die Wurzel einer Summe im Allgemeinen nicht in die Summe der Wurzeln

der einzelnen Summanden umgeformt werden darf», ist ein Beispiel eines solchen Prompts zur Selbsterklärung. Oder Du präsentierst die Schritte einer Umformung oder Herleitung in durcheinandergewirbelter Reihenfolge und forderst die Jugendlichen auf, eine korrekte, stringente Reihenfolge wiederherzustellen und dabei gut zu erklären, wie ein Schritt aus dem vorangehenden folgt. Und so weiter. Das Augenmerk der Jugendlichen muss unbedingt auf die einem mathematischen Tun zugrundeliegenden Strukturen, Zusammenhänge, Gesetzmässigkeiten gelenkt werden.

Deiner Kreativität beim Design solcher Selbsterklärungen sind keine Grenzen gesetzt. Entscheidend ist nur, dass Du dieser Phase Raum gibst, bevor Du zu den technischen Übungen und Aufgaben übergehst. Denn das oftmals mantraartig vorgetragene Argument «Übung macht den Meister» stimmt so nicht genau. Wer die grundlegenden Konzepte nicht verstanden hat, wird auch durch eine riesige Zahl von technischen Aufgaben nicht besser, sondern orientiert sich vor allem an Oberflächenmerkmalen. Wer dagegen die Konzepte gut verstanden hat, braucht weniger technische Aufgaben, um sicheres, automatisiertes Operieren zu erreichen und lässt sich auch von Aufgaben in neuem Gewand nicht abschrecken.

Und sonst noch?

Es ist klar, dass ich Dir in einem kurzen Brief nicht alles erzählen kann, was im Lehrberuf relevant ist. Es ist auch nicht alles quantifizierbar. Wichtig ist zum Beispiel, dass Du transparent bist, den Lernenden klar sagst, was Deine Absichten sind, wie Du vorgehst, was Du von Ihnen erwartest, wie Du sie beurteilst. Aber es gibt keine Transparenz-Skala, auf der Du mindestens soundso viele Punkte erreichen musst. Wichtig ist auch, dass Du Dich stets bemühst, fair zu sein und gefährliche Untiefen, die zu Ungleichbehandlung führen könnten (Sympathie und Antipathie, Halo-Effekte, Reihenfolgen- und Erwartungseffekte, und so weiter) umschiffst.

Wichtig ist auch, dass Du Deinen Lektionen eine klare Struktur und nachvollziehbare Ziele gibst. Lernende schätzen es, wenn sie wissen, was auf sie zukommt und wohin die Reise geht. Natürlich ist es nie verkehrt, Humor einfließen zu lassen.

Studien konnten sogar zeigen, dass bessere Prüfungsergebnisse erreicht werden, wenn die Lehrperson im Unterricht regelmässig und gezielt Humor einsetzt – allerdings sorgfältig dosiert und relevant für den Inhalt.

Fundamental ist, dass der Fortschritt Deiner Schülerinnen und Schüler und das Gedeihen ihres Könnens für Dich eine Herzensangelegenheit ist. Sie müssen jeden Tag spüren, dass sie Dir wichtig sind und dass Du alles daransetzt, ihnen die bestmögliche Unterstützung zu geben.

Eine Schülerin schrieb einmal: «I don't care how much you know until I know how much you care», und das ist ein fantastischer Satz. Natürlich musst Du viel wissen, aber aus dem Blickwinkel der Lernenden ist vor allem wichtig, dass Du ihnen den bestmöglichen Unterricht bietest, zu dem Du fähig bist. Mathematik ist das wohl grösste Abenteuer des abstrakten menschlichen Denkens; es verdient, in seiner ganzen Tiefe und Tragweite präsentiert zu werden.

ETH Zürich, Departement für Mathematik, Rämistrasse 101,
CH-8006 Zürich

E-Mail: armin.barth@math.ethz.ch



Armin P. Barth ist Dozent am Departement für Mathematik der ETH Zürich. Er hat am MINT-Lernzentrum der ETH geforscht und fast vierzig Jahre an Schweizer Gymnasien Mathematik unterrichtet.

Barth ist Autor diverser Bücher und Artikel zu den Themen Mathematik und Didaktik. Seine Kolumne «Café Mathe» lief während zehn Jahren in mehreren Schweizer Zeitungen. 2020 wurde Barth mit dem MINT-Preis der Rektorin der ETH ausgezeichnet.

Photo credentials: Privat.

FROM FINGERS TO FORMULAS: MOTOR SKILLS, EMBODIMENT, AND THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICAL THINKING

Venera Gashaj (HfH Zürich)

Mathematics is often regarded as the domain of abstraction, disconnected from bodily experience. From a developmental psychology perspective, this assumption is misleading. Children's first steps into the world of mathematics are not abstract; instead, they are grounded bodily experiences from interaction with the physical environment (i.e., sensorimotor experience; Piaget & Inhelder, 1966)¹. More recent research substantiated this idea and provided accumulating evidence for such embodied influences on the development of early mathematical skills. Understanding this trajectory is crucial not only for developmental psychology in general, but also for mathematics education: if early bodily experiences seed later mathematical thought, then the body is not peripheral but integral to the development of mathematical skills. The central question is no longer whether the body plays a role in mathematics, but how, when, and why.

Preparatory fine motor skills

Evidence from early childhood indicates that fine motor skills are reliably associated with emerging mathematical skills (see Barrocas, Roesch, Gawrilow, & Moeller, 2020 for a review)². For instance, we followed children from kindergarten to Grade 2 and observed that fine motor skills significantly predicted later mathematics achievement, over and beyond the influence of early mathematical skills (symbolic and nonsymbolic magnitude knowledge³; Gashaj, Oberer, Mast, &

Roebers, 2018)⁴. This layered pattern suggests a developmental cascade: fine motor skills contribute to the acquisition of early mathematical skills, which then form the foundation for later more formal mathematics.

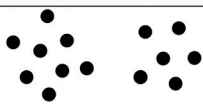
Non-symbolic comparison	Symbolic comparison
	
Children decide which group has more dots	Children decide which number is larger

Figure 1. Nonsymbolic and symbolic tasks

In a cross-sectional study, we further substantiated this notion. We found that non-symbolic mathematical skills (e.g., comparing dot arrays, see figure 1) were associated with fine motor skills (Gashaj, Oberer, Mast, & Roebers, 2019)⁵. Interestingly, symbolic mathematical skills (e.g., comparing Arabic digits) were not associated with fine motor skills. This dissociation aligns well with theories on cognitive development (e.g., Piaget, Vygotsky) positing that early sensorimotor experience underpins preverbal quantity reasoning, whereas symbolic notations require greater cognitive demands.

Developmental trajectories and cultural context

Development is not static; children's abilities change continuously as they acquire new strategies and internalize external supports.

¹ Piaget, J., & Inhelder, B. (1966). *La psychologie de l'enfant* [The psychology of the child]. Paris, France: Presses Universitaires de France.

² Barrocas, R., Roesch, S., Gawrilow, C., & Moeller, K. (2020). Putting a finger on numerical development: Reviewing the contributions of kindergarten finger gnosis and fine motor skills to numerical abilities. *Frontiers in Psychology*, 11, 1012. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01012>

³ Symbolic magnitude knowledge refers to understanding quantities represented by number symbols, e.g., knowing that $8 > 5$, whereas nonsymbolic magnitude knowledge

involves judging quantities without numbers, e.g., recognizing which group of dots is larger.

⁴ Gashaj, V., Oberer, N., Mast, F. W., & Roebers, C. M. (2018). The relation between executive functions, fine motor skills, and basic numerical skills and their relevance for later mathematics achievement. *Early Education and Development*, 30(1), 27–45. <https://doi.org/10.1080/10409289.2018.1539556>

⁵ Gashaj, V., Oberer, N., Mast, F. W., & Roebers, C. M. (2019). Individual differences in basic numerical skills: The role of executive functions and motor skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 182, 187–195. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.01.021>

Accordingly, above-described associations between fine motor and early mathematical skills cannot be assumed to remain stable. Thus, the central question is: how does the fine motor–math relationship evolve with age? Results from another recent study may shed some light on this. Using a cross-sectional design, we evaluated associations between fine motor and mathematical skills at ages 6, 8, and 10 (Gashaj & Trninic, 2023)⁶. We found that correlations shifted with age: associations were significant between mathematical skills and fine motor skills of the dominant hand (i.e., dexterity) in 6-year-olds as well as mathematical skills and dexterity of the non-dominant-hand in 8-year-olds. At age 10 no more significant association between those skills was observed. These findings support the so-called simulation account: overt motor supports are essential in the early stages of concept formation, but as children consolidate mathematical knowledge, reliance on visible motor skills diminishes (see Barsalou, 2008)⁷. This is an illustration of how external supports (hands, gestures, physical objects) are internalized to form embodied representations over time.

Yet, taking this seriously also means that the development of embodied representations should be sensitive to cultural differences in, for instance, (finger) counting habits. Saxe's (1981)⁸ classic study of the Oksapmin people in Papua New Guinea showed how children learned to count using a 27-body-part system. In this system, each number is linked to a part of the body, (e.g. starting at one thumb, moving up the arm, across the head, and down the other side). Young children at first thought of body parts mainly by how they looked alike, for example, treating the two elbows as the same. Later, they began to see them as steps in a fixed counting order. This shift is similar to what happens with U.S. children, who also progress from grouping by shape or similarity to understanding numerical order. The

difference lies in the cultural tools: while U.S. children typically rely on fingers as supports for counting, Oksapmin children relied on an extended embodied system that enabled them to represent numbers well beyond ten.

Other cultural groups highlight different variations of this same principle. For example, research with the Tsimane' in the Bolivian Amazon found that finger counting and montring are common but vary in starting hand, sequencing, and continuation rules, influenced by handedness and formal schooling (Cipora, Gashaj, Gridley, Soltanlou, & Nuerk, 2023)⁹. Together, these findings demonstrate that while the development from making use of overt embodied supports to relying on embodied representations may be universal, its form and timing are culturally determined.

Interventions: From Early Arithmetic to Advanced Mathematics

The use of body parts for numerical thinking thus appears to be universal even as its role shifts along the developmental trajectory. How can these embodied supports be deliberately used in mathematics instruction to benefit learners?

Regarding the use of fingers, causal evidence comes from classroom-based studies. In one such study, first-graders completed 18 30-minute sessions of finger-based training. The training explicitly taught children to use their fingers for representing numbers, performing simple arithmetic such as addition and subtraction, and for practicing number relations through grouping and regrouping. The intervention was completed as part of children's regular math lessons across their first school year. Compared with a control group following the standard curriculum, trained children performed better in addition and subtraction on post-tests at the end of first grade and nine months later in second grade (Frey, Gashaj, Nuerk, &

⁶ Gashaj, V., & Trninic, D. (2023). Adding up fine motor skills: Developmental relations between manual dexterity and numerical abilities. *Acta Psychologica*, 241, 104087. <https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2023.104087>

⁷ Barsalou, L. W. (2008). Grounded cognition. *Annual Review of Psychology*, 59, 617–645. <https://doi.org/10.1146/annurev.psych.59.103006.093639>

⁸ Saxe, G. B. (1981). Body parts as numerals: A developmental analysis of numeration among the Oksapmin in Papua New

Guinea. *Child Development*, 52(1), 306–316. <https://doi.org/10.2307/1129243>

⁹ Cipora, K., Gashaj, V., Gridley, A. S., Soltanlou, M., & Nuerk, H.-C. (2023). Cultural similarities and specificities of finger counting and montring: Evidence from Amazon Tsimane' people. *Acta Psychologica*, 239, 104009. <https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2023.104009>

Moeller, 2024)¹⁰. These findings show that targeted embodied supports can effectively foster mathematical learning during a key developmental window.

Just as fingers can serve as powerful support in early arithmetic, embodied supports can be leveraged in more advanced mathematics. In a recent project, high-school students engaged with game prototypes on tablets and in virtual reality where they could “grasp” and manipulate curves directly. For example, dragging their hands to explore slopes and rates of change. Findings indicated that when learners’ physical actions aligned with the underlying concept of the derivative (e.g., tilting or dragging to see changes in slope), they reported a stronger sense of embodiment but also achieved better conceptual understanding (Chatain et al., 2022)¹¹.

Taken together, these studies reveal a continuity across development. Although the specific forms of embodiment change, from finger use in early number learning to abstract gestural mappings in calculus, the principle remains the same. Mathematics education at all levels can benefit when bodily supports are deliberately integrated into learning.

Conclusion

These illustrative studies outline a coherent developmental trend. Early mathematics is scaffolded by fine motor skills, which help children establish numerical primitives. As these skills consolidate, overt motor-math correlations diminish, reflecting the internalization of embodied supports. Cultural variation highlights that embodiment is shaped by situational factors. Finally, classroom interventions indicate that targeted embodied supports can causally improve arithmetic, and design research demonstrates that embodiment remains a powerful tool even in higher mathematics.

Accordingly, the take home message is twofold. First, mathematical skills cannot be fully understood without the body: fine motor skills are building blocks, not bystanders. Second, mathematics education should not prematurely detach from these supports. Instead, it should harness them deliberately and developmentally, recognizing when bodily experiences are essential, when they are optional, and when they should or have been internalized. For mathematicians, this offers a provocative reframing: abstraction in mathematics is not the absence of the body but the continuation and culmination of it.

Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik (HfH) Zürich,
Institut für Verhalten, sozio-emotionale und psychomotorische
Entwicklungsförderung, Schaffhauserstrasse 239,
CH-8050 Zürich.

E-mail: venera.gashaj@hfh.ch

Website: <https://www.hfh.ch/person/venera-gashaj>

ORCID: [0000-0002-1979-5910](https://orcid.org/0000-0002-1979-5910)



Venera Gashaj, Dr.phil., is a lecturer at the University of Teacher Education in Special Needs (HfH, Zurich). She received her PhD in developmental psychology from the University of Bern and previously worked as a postdoctoral researcher at ETH Zurich and research associate at the Centre for Mathematical Cognition, Loughborough University, UK.

Her research examines the role of noncognitive factors in mathematical learning, focusing on motor development, math anxiety, and embodied cognition. She has conducted longitudinal studies on motor-math links, investigated protective and risk factors in math anxiety, and developed classroom interventions such as finger-based strategies and embodied storybook activities. Her current work extends to the effects of media use in young children and the design of evidence-based interventions for learning difficulties and social-emotional learning.

Photo credentials: Andrea Wullmann, Lichtartfotografie.ch

¹⁰ Frey, M., Gashaj, V., Nuerk, H.-C., & Moeller, K. (2024). You can count on your fingers: Finger-based intervention improves first-graders’ arithmetic learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 244, 105934. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.105934>

¹¹ Chatain, J., Ramp, V., Gashaj, V., Fayolle, V., Kapur, M., Sumner, R. W., & Magnenat, S. (2022). Grasping derivatives: Teaching mathematics through embodied interactions using tablets and virtual reality. *Proceedings of the ACM on Interaction Design and Children (IDC '22)*, 1–11. <https://doi.org/10.1145/3501712.3529748>.

ZUR MATHEMATISIERUNG DER VOLKSWIRTSCHAFTSLEHRE

Holger Herz (Universität Freiburg)

Die Volkswirtschaftslehre gilt heute als stark mathematisierte Disziplin, was insbesondere im Vergleich zu anderen sozialwissenschaftlichen Disziplinen wie der Soziologie, Psychologie oder selbst der Betriebswirtschaftslehre deutlich wird. Die Volkswirtschaftslehre hat sich so stark mit mathematischer Modellierung identifiziert, dass diese nicht nur ein Werkzeug, sondern fast schon ein konstitutives Merkmal der Disziplin darstellt.

Dabei darf nicht vergessen werden, dass diese Mathematisierung die Folge eines Prozesses ist. Die Ursprünge der Ökonomie gehen auf die Philosophie zurück. Insbesondere Adam Smith, aber auch die Arbeiten von beispielsweise John Stuart Mill, gelten auch heute noch als wegweisend für die Volkswirtschaftslehre. Diese philosophischen Ursprünge spiegelten sich lange Zeit in einer wenig formalisierten und oftmals normativ geprägten Forschung und Lehre wider. Erst im 20. Jahrhundert setzte sich eine zunehmende Mathematisierung der Volkswirtschaftslehre durch. Massgeblich vorangetrieben wurde dieser Prozess durch Paul Samuelson, der ab 1940 als Professor am MIT wirkte und 1970 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde. Sein 1947 erschienenes Werk *Foundations of Economic Analysis* wurde zum methodischen Fundament der modernen Volkswirtschaftslehre. Samuelsons Ziel war es, ökonomische Theorien nach dem Muster der Naturwissenschaften als kohärente Systeme darzustellen, in denen Annahmen explizit formuliert und Schlussfolgerungen logisch zwingend abgeleitet werden können.¹

Parallel dazu gewann der methodische Individualismus an Bedeutung. Er ergänzt die mathematische Modellbildung insofern, als er individuelles Handeln als kleinste Einheit ökonomischer Erklärung festschreibt und damit die deduktive Formalisierung erleichtert. Innerhalb der Volkswirtschaftslehre führte dies zur Herausbildung der

Mikroökonomie, die das Entscheidungsverhalten des Individuums in den Mittelpunkt stellt, und in der Folge zur Mikrofundierung der Makroökonomie, also der Ableitung gesamtwirtschaftlicher Zusammenhänge aus dem Zusammenspiel einzelner Akteure innerhalb eines ökonomischen Systems.

Die Stärken dieser Entwicklung liegen auf der Hand: Durch den methodologischen Individualismus und die formale Modellierung werden implizite Annahmen explizit und somit einer kritischen Prüfung zugänglich gemacht. Diese Annahmen beziehen sich vor allem auf die Ebene des Individuums – einerseits in Form von Präferenzen, andererseits in Form von Rationalitätsannahmen. Letztere unterstellen oftmals, dass Individuen ihre Präferenzen konsistent in Handlungen übersetzen, Informationen korrekt verarbeiten und diese in ihre Entscheidungen einfließen lassen. Diese Transparenz stärkt die Nachvollziehbarkeit ökonomischer Theorien. Zugleich ermöglicht die mathematische Strenge eine klare logische Ableitung von Schlussfolgerungen, wodurch Theorien systematisch auf Konsistenz und innere Kohärenz überprüft werden können. Gleichzeitig können die getroffenen Annahmen angepasst, und somit ihre Bedeutung für die Modelvorhersagen überprüft werden. In diesem Sinne entspricht die Formalisierung auch dem von Karl Popper betonten Prinzip der Wissenschaftlichkeit: Nur wenn Annahmen und Schlussfolgerungen präzise formuliert sind, können sie empirisch überprüft, potenziell widerlegt und damit im Sinne des Falsifikationismus wissenschaftlich fruchtbar gemacht werden.

Einfache Handhabbarkeit war bei der ökonomischen Theorieentwicklung dabei stets ein wichtiges Leitprinzip: Der Zweck ökonomischer Modelle ist nicht, die Wirklichkeit in allen Facetten vollständig abzubilden. Vielmehr liegt ihre Stärke

¹ Lindbeck, A. (1970). Paul Anthony Samuelson's Contribution to Economics. *The Swedish Journal of Economics*, 72(4), 342–354. <https://doi.org/10.2307/3439267>

darin, dass sie komplexe Zusammenhänge auf zentrale Mechanismen reduzieren und dadurch analytisch handhabbar machen kann. Diese bewusste Abstraktion sollte kein Ausdruck von Ignoranz sein, sondern eine methodische Entscheidung, die es erlaubt, Hypothesen klar zu formulieren und ihre Implikationen präzise zu prüfen. Standardmodelle arbeiten daher mit einfachen Annahmen – wie etwa rationalem Verhalten, stabilen Präferenzen, oder rationalen Erwartungen – die es ermöglichen, klare Hypothesen zu entwickeln und diese empirisch zu testen. Trotz ihrer Vereinfachung liefern solche Modelle in vielen Bereichen gute Prognosen, und ihre Annahmen erweisen sich häufig als plausibel.

Die Leistungsfähigkeit des Standardmodells darf allerdings nicht darüber hinwegtäuschen, dass viele seiner Annahmen nicht deshalb fortgeführt werden, weil sie empirisch besonders gut belegt wären, sondern weil sie sich mathematisch einfach handhaben lassen. Diese Bequemlichkeit birgt die Gefahr, einfache und traktable Annahmen allein aus Gründen der Eleganz beizubehalten, ohne sie kritisch zu hinterfragen, wie beispielsweise vollständige Rationalität oder perfekt Bayesianisches Verhalten. Dass das Standardmodell „nicht völlig falsch“ ist, reicht nicht aus, um mögliche Erweiterungen auszuschließen. Vielmehr sollten alternative oder ergänzende Annahmen – etwa systematische Abweichungen von rationalem Verhalten – ausdrücklich in die Analyse aufgenommen werden. Besonders die Rationalitätsannahme verdeutlicht, wie stark die Orientierung an formaler Handhabbarkeit wirkt: Sie konnte sich so lange im Standardmodell halten, weil sie leicht zu modellieren ist – obwohl empirische Befunde, insbesondere aus der Verhaltensökonomie, längst überzeugend systematische Abweichungen nachweisen. Gleichzeitig muss allerdings auch festgehalten werden, dass es der Verhaltensökonomie bisher nur begrenzt gelungen ist, die kritisierten Annahmen des Standardmodells durch tragfähige Alternativen zu ersetzen, die denselben Grad an Traktabilität und allgemeiner Anwendbarkeit gewährleisten.

Die Dominanz mathematischer Modelle in der Volkswirtschaftslehre hat in den letzten Jahren eine breite öffentliche Kritik hervorgerufen. Unter dem Schlagwort der Pluralismusdebatte fordern Studierende, Forschende und gesellschaftliche Initiativen eine Öffnung der Ökonomik gegenüber alternativen Ansätzen. Ein zentraler Vorwurf lautet, dass die starke Orientierung an geschlossenen, formal eleganten Modellen den Blick auf reale ökonomische Dynamiken verstellt habe. Besonders nach der globalen Finanzkrise von 2008 wurde diese Kritik laut, da viele prominente Modelle die Krise nicht vorhergesehen hatten. Zudem wurde das Festhalten an strikten Rationalitätsannahmen bemängelt, obwohl diese in zahlreichen verhaltensökonomischen Experimenten widerlegt wurden. Damit wurde die Mathematisierung, die lange als Ausweis wissenschaftlicher Strenge galt, selbst zu einem zentralen Streitpunkt über die gesellschaftliche Relevanz ökonomischen Wissens. Zugleich wird dabei jedoch oft übersehen, dass viele der geäußerten Einwände gerade durch die vorausgehende Formalisierung erst möglich wurden: Nur weil Ökonomen gezwungen waren, ihre Annahmen formal und transparent offenzulegen, können diese nachträglich als empirisch unzutreffend identifiziert und damit fundiert kritisiert werden.

Eine angemessene Reaktion auf diese Kritik kann also nicht in der Abkehr von der Mathematik in der ökonomischen Analyse bestehen. Vielmehr gilt es, die mathematischen Modelle konsequent weiterzuentwickeln, und die Annahmen und Vorhersagen der Modelle empirischer Tests zu unterziehen. Mathematik stellt in diesem Zusammenhang primär ein Instrumentarium zur präzisen Formulierung von Annahmen und zur stringenten Ableitung von Schlussfolgerungen dar. Eine Kritik am mathematischen Ansatz sollte sich daher nicht gegen die Sprache selbst richten, sondern auf die Angemessenheit der zugrunde liegenden Annahmen sowie auf mögliche Fehler in der logischen Deduktion abzielen. Auf diese Weise können Annahmen systematisch angepasst und Modelle weiterentwickelt werden, die

die ökonomische Wirklichkeit adäquater erfassen und zugleich die methodische Strenge der Disziplin bewahren. Die Stärken des mathematischen Ansatzes im Hinblick auf die Falsifizierbarkeit der Modellvorhersagen sowie der getroffenen Annahmen seien in diesem Kontext nochmals hervorgehoben.

Universität Freiburg, Fakultät der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, Department für Volkswirtschaftslehre, Boulevard de Pérolles 90, 1700 Freiburg, Schweiz.

E-mail: holger.herz@unifr.ch

Website: www.unifr.ch/industrie

ORCID: [0000-0003-3495-1640](https://orcid.org/0000-0003-3495-1640)



Holger Herz, Professor für Industrieökonomik.

Prof. Dr. Holger Herz studierte Volkswirtschaftslehre an der Universität Mannheim und der University of California, Berkeley. Nach der Promotion im Jahr 2011 in Volkswirtschaftslehre an der Universität Zürich arbeitete er als Post-Doc an der

Harvard Business School sowie in Zürich.

Seit 2015 ist er Professor für Volkswirtschaftslehre, insbesondere Industrieökonomik, an der Universität Freiburg.

Photo credentials: Faculty of Management, Economics and Social Sciences, University of Fribourg

MONDAY MORNING: SHOULD I SLEEP IN OR ZOOM IN?

IF (AND WHEN) LECTURE ATTENDANCE RELATES TO ACADEMIC PERFORMANCE

Agnes Bäker (VU Amsterdam), Christiane Barz (University of Zurich) & Eugen Gorich (University of Munich)

Lecture attendance helps only when it comes with engagement. Students face time scarcity and enjoy considerable autonomy in how they schedule their week.¹ On a Monday morning, they can choose to attend a lecture, study independently, or sleep in. A widespread assumption is that “more time on task” leads to better task performance. Some evidence supports this view,² yet other work points instead to the primacy of quality over quantity in study behaviour.³

Lecture attendance is a case in point. Many studies report a positive association with exam performance,⁴ and a meta-analysis confirms this overall pattern.⁵ At the same time, other research offers a more nuanced picture: homework or self-study may substitute for lectures, attendance effects can be small, and results may depend on gender or ability.⁶

We contribute by examining how live but remote attendance relates to exam performance in two

introductory mathematics courses. Building on the idea that study-time quality matters, we focus on the quality of attendance — whether students engage actively or passively.

To our knowledge, this is the first study to analyse attendance quality explicitly. The findings highlight when students benefit from logging into lectures and when they might not. In short, we provide evidence to guide students deciding how to spend their Monday mornings.

Active versus passive lecture attendance

As discussed earlier, the link between lecture attendance and performance is not consistently positive, which suggests that *how* students attend may be as important as *whether* they attend. One possible explanation is that being physically or virtually present is not the same as engaging with the material. Especially on Monday mornings, when attention levels may be low, students might join a lecture without actively following it.

¹ G. S. Becker (1965). A Theory of the Allocation of Time, *Economic Journal*, 75(299), 493–517; A. Gortner Lahmers & C. R. Zulauf (2000). Factors associated with academic time use and academic performance of college students: A recursive approach, *Journal of College Student Development*, 41(5), 544–556; A. Nonis & G. I. Hudson (2010). Performance of college students: Impact of study time and study habits, *Journal of Education for Business*, 85(4), 229–238.

² N. Z. Zacharis (2015). A multivariate approach to predicting student outcomes in web-enabled blended learning courses, *Internet and Higher Education*, 27, 44–53.

³ H. Schuman, E. Walsh, C. Olson & B. Etheridge (1985). Effort and reward: The assumption that college grades are affected by quantity of study, *Social Forces*, 63(4), 945–966; E. A. Plant, K. A. Ericsson, L. Hill & K. Asberg (2005). Why study time does not predict grade point average across college students: Implications of deliberate practice for academic performance, *Contemporary Educational Psychology*, 30(1), 96–116.

⁴ M. R. Edwards & M. E. Clinton (2019). A study exploring the impact of lecture capture availability and lecture capture

usage on student attendance and attainment, *Higher Education*, 77(3), 403–421; E. Nordmann, C. Calder, P. Bishop, A. Irwin & D. Comber (2019). Turn up, tune in, don't drop out, *Higher Education*, 77(6), 1065–1084.

⁵ M. Credé, S. G. Roch & U. M. Kieszczynka (2010). Class Attendance in College: A Meta-Analytic Review of the Relationship of Class Attendance with Grades and Student Characteristics, *Review of Educational Research*, 80(2), 272–295.

⁶ Stratford Douglas & John Sulock (1995). Estimating educational production functions with correction for drops, *Journal of Economic Education*, 26(2), 101–112; Massimiliano Bratti & Sandro Staffolani (2002). Student time allocation and educational production functions, *Annals of Economics and Statistics*, 67/68, 103–140; Gregory A. Krohn & Clarence M. O'Connor (2005). Student effort and performance over the semester, *Journal of Economic Education*, 36(1), 3–28; Barbara S. Grave (2011). The effect of student time allocation on academic achievement, *Education Economics*, 19(3), 291–310; Vincenzo Andrietti & Carlos Velasco (2015). Lecture Attendance, Study Time, and Academic Performance: A Panel Data Study, *Journal of Economic Education*, 46(3), 239–259.

Such *passive attendance* is unlikely to foster learning and may even be counterproductive if students treat it as a substitute for (later) genuine engagement with the material.

In contrast, active participation is expected to make attendance beneficial. For instance, findings on study activities other than lecture attendance show that outcomes improve only when students invest effort, not simply time.⁷ We thus expect that active attendance will be positively associated with exam performance, while passive attendance may have no effect or even a negative one. This distinction helps reconcile earlier studies: when quality of attendance is ignored, positive and negative effects can blur into inconsistent results. By focusing on how actively students participate, we can assess more clearly when attendance contributes to learning.

Method

To examine how active versus passive lecture attendance relates to exam performance, we combine data on student attendance, engagement, and exam scores from two introductory mathematics courses. The following subsections describe the teaching context, the datasets, and how we measured attendance and engagement.

Study context

The study examines the relationship between lecture attendance and exam performance in a higher education system where attendance is voluntary and does not directly affect course grades. We focus on two consecutive introductory mathematics courses offered by a business school at a major European university. Both courses are mandatory for first-year students in business, banking and finance, computer science, and economics, and are required as a minor for some other programs.

Lectures lasted 90 minutes and were streamed live via Zoom during the Covid-19 pandemic.

Regardless of attendance, students had access to annotated lecture notes, practice problems, weekly quizzes, and recordings of the lectures through the Learning Management System (LMS). The first course (fall 2020) was scheduled on Monday mornings at 8:00 a.m., the second (spring 2021) on Monday mornings at 10:15 a.m. As the very first class of the week, these time slots may have increased the temptation to sleep in rather than attend.

During live lectures, students could respond to short multiple-choice questions presented through the LMS. These questions were not graded but intended to activate students. Responses were only possible in real time, not afterwards, which makes them a useful indicator of engagement.

Data

The main dataset covers 931 students enrolled in the fall 2020 course. For each student, we observe exam performance, live lecture attendance, responses to in-class quiz questions, study major, gender, and whether the student had previously failed and was retaking the course.

A second dataset from the consecutive spring 2021 course includes 636 students, most of whom had taken the fall 2020 course. This allows us to check robustness while also controlling prior performance.

Analysis

We first examined correlations between lecture attendance, active participation, and exam scores. We then estimated Ordinary Least Squares (OLS) regressions with robust standard errors. In the main specification, final exam scores were regressed on the number of lectures attended and on our measure of active participation. Analyses were conducted for the full sample as well as for the subset of students who attended at least one lecture.

⁷ Zacharis (2015), cf. note 2.

Variables

The dependent variable is the score in the final exam (0–60 points, with 30 points required to pass).

Lecture attendance is measured as the number of live lectures attended (0–12 in the fall course, 0–10 in the spring course).

Active attendance (engagement) is measured through student participation in short in-class quizzes: students who submitted any answers – right or wrong – demonstrated active attendance, while non-respondents are classified as passive. Specifically, we capture the level of engagement by the proportion of in-class quiz questions that a student answered during attended lectures. Questions always included an “I don’t know” option, so students could choose to answer correctly, incorrectly, indicate that they do not know the answer, or not answer at all. Our measure of active attendance is the average share of answered questions across all lectures. Unattended lectures enter this measure as zero.

Control variables include indicators for study major, gender, and course repetition. In particular, we control for the majors Business, Banking and Finance (B&F), Computer Science (CS), STEM majors, and Economics. Repeating students (course repetition) were distinguished because their exam performance and attendance behavior may differ from first-time participants. All binary indicators are coded 1 = yes and 0 = no throughout.

Results

This section presents the empirical findings. We begin with descriptive statistics on lecture attendance, active participation, and exam scores. We then turn to regression analyses that first replicate the well-known positive link between attendance and performance, before examining how this relationship changes once we distinguish between active and passive attendance. Finally, we report robustness checks that control for prior ability using data from the second course in spring of 2021.

	Mean	SD	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
1 Exam Points	33.35 (33.45)	10.31 (10.25)	1										
2 # Attended Lectures	7.73 (6.55)	4.38 (4.89)	0.19*** (0.13***)	1									
3. % Answered Questions	0.40	0.30	0.28***	0.88***	1								
4 Major Business	0.44 (0.43)	0.50 (0.49)	-0.07* (-0.08*)	0.06 (0.10**)	0.05	1							
5 Major B&F	0.18 (0.17)	0.38 (0.38)	-0.01 (0.00)	0.00 (0.02)	0.01	-0.41*** (-0.39***)	1						
6 Major CS	0.17 (0.18)	0.38 (0.38)	-0.03 (-0.01)	-0.04 (-0.07*)	-0.07	-0.4*** (-0.4**)	-0.21*** (-0.21***)	1					
7 Major STEM	0.02 (0.02)	0.12 (0.15)	0.04 (0.07*)	-0.07* (-0.11***)	-0.06	-0.11** (-0.13***)	-0.06 (-0.07*)	-0.06 (-0.07*)	1				
8 Major Economics	0.14 (0.13)	0.35 (0.34)	0.08* (0.06)	0.08* (0.10**)	0.08*	-0.37*** (-0.34***)	-0.19*** (-0.18***)	-0.19*** (-0.18***)	-0.05 (-0.06)	1			
9 Major Others	0.05 (0.07)	0.33 (0.25)	0.07 (0.05)	-0.16*** (-0.19***)	-0.12***	-0.21*** (-0.23***)	-0.11*** (-0.12***)	-0.10** (-0.12**)	-0.03 (-0.04)	-0.09** (-0.1*)	1		
10 Male	0.62 (0.64)	0.48 (0.48)	0.14*** (0.13***)	-0.01 (-0.06)	0.05	-0.10** (-0.13***)	0.09** (0.09**)	0.07 (0.09*)	0.01 (0.02)	0.03 (0.0)	-0.11** (-0.06*)	1	
11 Course Repetition	0.12 (0.19)	0.32 (0.39)	0.03 (0.05)	-0.23*** (-0.37***)	-0.20***	0.05 (0.06)	0.03 (0.04)	0.00 (0.01)	-0.05 (-0.07*)	-0.06 (-0.06)	-0.05 (-0.08*)	-0.06 (-0.05)	1

Table 1. Summary statistics and correlations for students attending at least one lecture in fall 2020 (values in brackets refer to the full main sample).

Descriptive statistics

Table 1 summarizes descriptive statistics for students who attended at least one lecture in fall 2020 (N=790 students) as well as the full sample in brackets below (N=931). The average exam score in the full sample was 33.45 out of 60. Students attended on average 6.55 of the 12 lectures; among those who attended at least once, the mean rose to 7.73. Exam performance correlated positively with lecture attendance. In particular the correlation is 0.19 with a p-value of less than 0.001 for those who attended at least one lecture; it is 0.13 with a p-value of less than 0.001 across all students in the sample. Note that throughout all tables, we use *, **, and *** to highlight estimates with a p-value of less than 0.05, 0.01, and 0.001 respectively.

Table 1 further shows that our measure of *active* attendance — the percentage of answered in-class quiz questions — correlated even more strongly with exam performance compared to attendance overall. This correlation of 0.28 is noticeably larger than the one between performance and attendance alone. Among the controls, male students had higher scores on average, while repeaters attended fewer lectures and active engagement during lectures was lower, suggesting reduced benefits from repeating.

Multivariate estimations: Exam points and lecture attendance

Regression results show a positive relationship between lecture attendance and exam performance when quality of attendance is not considered (Table 2, Model 1). Each additional lecture attended was associated with about 0.5 extra exam points. Over the full 12 lectures, this translates to roughly 10% of the maximum achievable score. The link remained positive and significant when restricting the analysis to students who attended at least once (Model 2). These findings replicate the established pattern that lecture attendance is linked to higher grades.⁸

Multivariate estimations: Active vs. passive attendance

Once active participation is introduced into the model, the picture changes (Table 2, Model 3). Active attendance — the percentage of answered in-class quiz questions — is strongly positively related to exam outcomes. Students who consistently participated actively scored, on average, more than a quarter of the maximum exam points higher than those who merely attended passively.

At the same time, the coefficient for lecture attendance turned negative and significant once active attendance was controlled for. This suggests that passive attendance, in the absence of engagement, is not only unhelpful but may even be associated with lower exam performance compared to not attending at all.

	Model (1)	Model (2)	Model (3)
Constant	26.01*** (0.97)	25.75*** (1.08)	27.01*** (1.08)
Major B&F	0.53 (0.96)	0.28 (1.02)	0.29 (0.97)
Major CS	0.77 (0.94)	0.31 (1.03)	0.69 (1.02)
Major Others	5.78*** (1.41)	6.53*** (1.75)	5.95** (1.84)
Major STEM	8.33*** (2.26)	6.34 (3.29)	6.33 (3.25)
Major Economics	2.18* (1.04)	2.60* (1.10)	2.58* (1.10)
Male	3.37*** (0.71)	3.30*** (0.76)	2.78*** (0.75)
Course Repetition	4.52*** (0.86)	3.30*** (0.98)	3.35*** (0.99)
# Attended Lectures	0.50*** (0.08)	0.55*** (0.09)	-0.40* (0.19)
% answered	-	-	15.30*** (2.62)
N	931	790	790
R-squared	0.08	0.09	0.14
Adj. R-squared	0.07	0.08	0.12
F Statistic	10.07***	8.83***	12.35***

Note: Robust standard errors in parentheses. * p < 0.05, ** p < 0.01, *** p < 0.001.

Table 2. OLS estimation of the relationship between (active) lecture attendance and exam performance.

Among the controls, repeaters achieved higher scores, which may reflect the higher stakes of the exam for these students, and male students again performed better on average.

⁸ Credé, Roch & Kieszczynka (2010); Edwards & Clinton (2019); Nordmann *et al.* (2019).

Robustness check: Controlling for student ability

To test whether our measure of active attendance partly reflects prior mathematical ability, we replicate the analysis with data from the second mathematics course in spring 2021. For these 636 students, we observe their exam performance from the first course in fall 2020, which serves as a proxy for prior mathematical ability.

	Model (1)	Model (2)	Model (3)
Constant	12.19*** (1.51)	11.14*** (1.68)	11.31*** (1.71)
Major B&F	0.27 (0.92)	0.20 (1.01)	0.34 (1.01)
Major CS	0.31 (0.97)	-0.03 (1.14)	0.21 (1.15)
Major Others	4.15 (19.10)	-	-
Major STEM	-0.23 (14.43)	-	-
Major Economics	-0.73 (0.95)	-1.07 (1.09)	-0.94 (1.09)
Male	-0.82 (0.72)	-0.79 (0.79)	-0.94 (0.79)
Course Repetition	-3.77* (1.87)	-2.28 (2.74)	-2.06 (2.64)
Exam Points Fall 2020	0.70*** (0.04)	0.70*** (0.04)	0.69*** (0.04)
# Attended Lectures	0.25** (0.09)	0.39** (0.12)	0.00 (0.23)
% answered	-	-	5.27* (2.45)
N	636	477	477
R-squared	0.41	0.44	0.44
Adj. R-squared	0.40	0.43	0.43
F Statistic	47.83***	46.82***	46.58***

Note: Robust standard errors in parentheses. * p < 0.05, ** p < 0.01, *** p < 0.001.

Table 3. OLS estimation of the relationship between (active) lecture attendance and exam performance using the second sample

The descriptive patterns are consistent with the main sample: both lecture attendance and active participation correlate positively with exam scores. More importantly, the regression results in Table 3 show that the distinction between active and passive attendance remains once ability is controlled for. Students who actively participated scored on average more than 10 percent higher than those who remained passive, even after accounting for prior exam score as measure

of ability. By contrast, the number of lectures attended no longer has an independent effect once participation quality and ability are included.

For brevity, we do not reproduce the full set of descriptive and correlation tables here. These are available upon request.

Taken together, the analyses suggest a clear pattern: While attendance alone shows the familiar positive association with exam performance, this effect disappears or even reverses once participation quality is taken into account. What matters is not whether students log in, but whether they engage. The following section discusses how these findings fit into the broader literature and what they might imply for students.

Discussion

With few exceptions, earlier research has found lecture attendance to be positively associated with exam performance.⁹ Explanations for variation in these findings usually point to student characteristics such as ability or motivation, or to course characteristics such as placement within the program.¹⁰ Consistent with this literature, our study first reproduces the common result: students who attend more lectures tend to perform better. Yet once the *quality* of attendance is taken into account, the picture changes. Inspired by the idea that the effectiveness of study time depends on how it is used,¹¹ we find that attendance without engagement can be neutrally or even negatively related to performance, while active attendance is strongly beneficial.

This result underscores a straightforward point: it is not the act of being present, but cognitive engagement with the material that matters. Similar patterns are documented elsewhere — for example, students who take more extensive lecture notes achieve higher scores.¹² Passive attendance

⁹ Credé, Roch & Kieszczyńska (2010); Edwards & Clinton (2019); Nordmann *et al.* (2019); Browne, M. N., Hoag, J. H., Wheeler, M. V., & Boudreau, N. (1991). The impact of teachers in economic classrooms. *The Journal of Economics*, 17, 25-30; McConnell, C. R., & Lamphear, C. (1969). Teaching principles of economics without lectures. *The Journal of Economic Education*, 1(1), 20-32.

¹⁰ Edwards & Clinton (2019); Nordmann *et al.* (2019); Stanca, L. (2006). The effects of attendance on academic performance: Panel data evidence for introductory microeconomics. *The Journal of Economic Education*, 37(3), 251-266.

¹¹ Plant *et al.* (2005); Nonis & Hudson (2010).

¹² Nye, P. A., Crooks, T. J., Powley, M., & Tripp, G. (1984). Student note-taking related to university examination performance. *Higher Education*, 13(1), 85-97.

may even be counterproductive if students view it as a substitute for preparation. In contrast, students who do not attend may instead allocate time to self-study, which can be at least as effective.¹³

Importantly, these findings hold when controlling for prior mathematical ability. This suggests that the observed benefits of active attendance are not driven only by stronger students being more likely to participate. Previous studies also hint at interactions between ability and learning mode — for example, low-ability students may struggle more with pre-recorded lectures.¹⁴ Future work could investigate more systematically how ability moderates the gains from active versus passive attendance.

Our study has several strengths. We draw on automatically recorded data from large online mathematics courses during the Covid-19 pandemic, linking attendance and participation directly to exam outcomes. This avoids some of the biases that arise from self-reported study time or perceived engagement. To our knowledge, no prior study has considered the *quality of attendance* as a boundary condition for the effect of lecture attendance on performance.

At the same time, limitations apply. The analysis is restricted to mathematics, where learning outcomes can be measured through objectively correct answers; generalizability to other fields is uncertain. The focus on first-year students may also matter, as earlier work shows attendance effects to be strongest in the early stages of study.¹⁵ Moreover, the online setting may have amplified variation in attention, since remote learning environments are often more distracting than classrooms.¹⁶ Whether similar patterns hold in on-site lectures remains an open question.

The results highlight that the positive association between attendance and exam performance is observed only when students engage actively. When engagement is absent, attendance shows

no consistent link with outcomes. More generally, the results emphasize that simple lecture attendance cannot substitute for genuine effort.

Conclusion

Students' time is limited, and hence they must decide whether it is best spent attending lectures. Our analyses indicate that attendance in itself is not reliably associated with better exam outcomes; what matters is whether students engage actively during lectures. Passive attendance — logging in without participation — appears to be of little value and may even coincide with lower performance if it replaces more effective study.

The contribution of this study is to highlight the quality of attendance as a boundary condition that helps explain why earlier research has reported inconsistent results. By distinguishing between active and passive attendance, we provide evidence that can inform students' decisions: if they are able to participate actively, attending lectures is linked to substantially higher exam performance; if not, other forms of exam preparation may be more effective.

It is important to note that all results are based on observational data. The reported relationships are associative and should not be interpreted as causal effects. These findings are drawn from two large online mathematics courses, and further research will be needed to examine how broadly they apply across subjects and teaching formats. Still, the central message is robust: it is not attendance as such, but active engagement, that is consistently associated with better learning outcomes.

¹³ Bratti & Staffolani (2002); Douglas & Sulock (1995); Edwards & Clinton (2019).

¹⁴ O'Brien, M., & Verma, R. (2019). How do first year students utilize different lecture resources? *Higher Education*, 77(1), 155-172; Le, K. (2022). Pre-recorded lectures, live online lectures,

and student academic achievement. *Sustainability*, 14(5), 2910.

¹⁵ Nordmann *et al.* (2019).

¹⁶ Plant *et al.* (2005).

Universität Zürich, Institut für Betriebswirtschaftslehre, Lehrstuhl für Mathematik der Wirtschaftswissenschaften, Plattenstrasse 14, 8032 Zürich, Schweiz.

E-Mail: Christiane.barz@business.uzh.ch

Website: <https://www.business.uzh.ch/de/research/professorships/math/team/barz.html>

ORCID: [0000-0002-1404-8270](https://orcid.org/0000-0002-1404-8270)



Christiane Barz is Professor of Mathematics for Business and Economics at the Department of Business Administration of the University of Zurich. She currently serves as Deputy Department Director, board member of the Swiss OR Society, and Associate Editor of Mathematical Methods in OR, OR Spectrum and IMA Journal of Management Mathematics.

Her research focuses on approximate dynamic programming and revenue management.

Photo credentials: Frank Brüderli, Zürich

Vrije Universiteit Amsterdam, Department of Management and Organization, De Boelelaan 1105, 1081 HV Amsterdam, The Netherlands

E-Mail: a.baeker@vu.nl

Website: <https://research.vu.nl/en/persons/agnes-b%C3%A4ker>

ORCID: [0000-0002-2580-3278](https://orcid.org/0000-0002-2580-3278)



Agnes Bäker is Associate Professor of Leadership at the Department of Management and Organization at Vrije Universiteit Amsterdam and Program Director of the Bachelor program in International Business Administration.

She currently serves as Associate Editor at Human Resource Management (Wiley) and is an associate member of the Center for Higher Education and Science Studies (CHESS).

Her research focuses on leadership and careers in higher education institutions and hospitals.

Photo credentials: VU Amsterdam

Ludwig Maximilians Universität München, Institut für Statistik, Ludwigstrasse 33, 80539 München, Deutschland

E-Mail: eugen.gorich@campus.lmu.de

Website: <https://github.com/GoGenius96>

ORCID: [0009-0005-7069-4284](https://orcid.org/0009-0005-7069-4284)



Eugen Gorich is a Master's student in Statistics and Data Science at the Department of Statistics, Ludwig-Maximilians-Universität München, with a focus on methodology and modelling.

He currently works at the Statistical Consulting Laboratory (StaBLab) of the department and is actively engaged in university politics.

His academic interests include statistical methodology, modelling, and interdisciplinary applications of data science.

Photo credentials: Private

GENERALVERSAMMLUNG | ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

VSH-AEU

Vereinigung der
Schweizerischen Hochschuldozierenden



Association Suisse
des Enseignant-e-s d'Université

Die Vereinigung der Schweizerischen Hochschuldozierenden (VSH-AEU) ist ein Verein gemäss Art. 60 ff. des Schweizerischen Zivilgesetzbuchs. Er steht allen Dozierenden der zwölf universitären Hochschulen (Kantonale Universitäten und oder Eidgenössische Technische Hochschulen) offen.

Die Vereinigung setzt sich ein für die aktuellen Anliegen der universitären Lehre und Forschung in der Schweiz und für die Förderung des Verständnisses in der Öffentlichkeit für das Hochschulwesen und die darin verantwortlich Tätigen.

Die aktuelle Mitgliederzahl liegt bei ca. 400 Mitgliedern. Der Jahresbeitrag für die individuelle Mitgliedschaft beträgt zurzeit CHF 100. Werden Sie Mitglied ([Anmeldung](#)) und nehmen Sie an der nächsten Mitgliederversammlung teil!

Mitgliederversammlung	Assemblée générale
Freitag, 5. Dezember 2025	Vendredi, 5 décembre 2025
14.00 h	
University of Fribourg – PER 10, Small Auditorium 0.014	
Chemin du Musée 9, Fribourg	

L'Association Suisse des Enseignant·e·s d'Université (VSH-AEU) est une association au sens des articles 60 ss du Code Civil Suisse. Elle est ouverte à tous les enseignant·e·s des douze hautes écoles universitaires (universités cantonales et écoles polytechniques fédérales).

L'Association a pour but de s'engager dans tout sujet universitaire concernant l'enseignement et la recherche en Suisse et d'informer et promouvoir la compréhension des affaires universitaires et surtout de la situation et des tâches des enseignant·e·s des hautes écoles universitaires auprès du public et des autorités concernées.

A l'heure actuelle, l'Association compte environ 400 membres. La cotisation pour l'adhésion individuelle se monte actuellement à 100.00 CHF par année. Devenez membre ([Adhésion](#)) et participez à la prochaine Assemblée générale !

STELLENAUSSCHREIBUNG | POSTES À POURVOIR



Assistant Professor (Tenure Track) of Dynamical Systems and Control

The Department of Mechanical and Process Engineering (D-MAVT, www.mavt.ethz.ch) at ETH Zurich invites applications for the above-mentioned position.

<https://ethz.ch/en/the-eth-zurich/working-teaching-and-research/faculty/faculty-affairs/ausgeschriebene-professuren/ingenieurwissenschaften/aptt-dynamical-systems-and-control.html>

The new professor is expected to contribute to the fundamental theoretical, technological and interdisciplinary development of disciplines related to dynamical systems and control and to strengthen the leading position of ETH Zurich and D-MAVT in this field. She or he should establish and extend exchange and interaction with academia and industry on a national and international level.

The new professor must demonstrate an excellent international record as an engineer and scientist in the domains of interest for this call. While scientific excellence and originality in one of the subfields of dynamical systems and control is the priority, a focus on «embodied intelligence» is highly desired, i.e., a focus on systems that interact directly with the physical world, such as robots, autonomous vehicles, industrial automation, manufacturing, energy systems, as well as sensors, actuators, and control architectures that are particular to the mechanical and process engineering disciplines.

Successful candidates should hold a PhD degree or equivalent in engineering or related fields, and have an outstanding international record of accomplishments in dynamical systems. Furthermore, a strong motivation and indisputable commitment to undergraduate (in German or English) and graduate (in English) student teaching and the ability to lead a research group are expected.

Assistant professorships have been established to promote the careers of younger scientists. ETH Zurich implements a tenure track system equivalent to that of other top international universities.

ETH Zurich is an equal opportunity and family-friendly employer, values diversity, and is responsive to the needs of dual-career couples.

Please apply online: www.facultyaffairs.ethz.ch

The closing date for applications is 15 November 2025.

Applications should include a curriculum vitae, a list of publications and projects, three statements on a) research, b) teaching, c) leadership, three key publications, a description of the three most important achievements, and a certificate of the highest degree. The letter of application should be addressed **to the President of ETH Zurich, Prof. Dr. Joël Mesot.**

Impressum | Mentions

Bulletin VSH-AEU, 49. Jahrgang / 49^e année © 2025, ISSN 1663-9898, Nichtkommerzielle Verwendung mit Quellenangabe gestattet (CC BY 4.0) Herausgegeben mit Unterstützung der Schweizerischen Akademie der Geistes- und Sozialwissenschaften (SAGW)

Bulletin VSH-AEU, 48. Jahrgang / 48^{ème} année © 2022, ISSN 1663-9898, Nichtkommerzielle Verwendung mit Quellenangabe gestattet (CC BY 4.0) Herausgegeben mit Unterstützung der Schweizerischen Akademie der Geistes- und Sozialwissenschaften (SAGW)



Mitglied der Schweizerischen Akademie
der Geistes- und Sozialwissenschaften
www.sagw.ch

Vereinigung der
Schweizerischen Hochschuldozierenden



Association Suisse
des Enseignant-e-s d'Université



Membre de l'Académie suisse
des sciences humaines et sociales
www.assh.ch

Herausgeber und Verlag | Editeur

Vereinigung der Schweizerischen Hochschuldozierenden
Association Suisse des Enseignant-e-s d'Université
Associazione Svizzera dei Docenti Universitari

Generalsekretariat | Secrétariat général

Prof. Dr. Stephan Morgenthaler
Ecole Polytechnique de Lausanne (EPFL), SB IMA STAP, MAB 1473 (Bâtiment MA)
Station 8, 1015 Lausanne

Email : stephan.morgenthaler@epfl.ch | Homepage: www.vsh-aeu.ch

PC-Konto / CPP 80-47274-7 | IBAN: CH38 3000 0001 8004 7274 7

Redaktion | Rédaction

Dr. phil. Franziska Schumacher | E-Mail: bulletin@vsh-aeu.ch

Layout:

© APRON REVOLUTION | E-Mail: contact@apronrevolution.org

Druck | Imprimerie

Canisius AG, Avenue Beauregard 3, 1700 Fribourg, Suisse

Anzeigen | Annonces

Generalsekretariat

Preise | Prix:

- Stellenanzeigen | Postes à pourvoir: CHF 250 (½ Seite/page)
CHF 500 (1 Seite/page)
- andere Annoncen | autres annonces: CHF 500/1000

Vorstand am 1. August | Comité directeur au 1^{er} août 2022

Präsident | Président

Prof. Dr. rer. nat. Christian Bochet
Université de Fribourg, Département de chimie
Chemin du musée 9, 1700 Fribourg,
Tel.: 026 300 8758, Email : christian.bochet@unifr.ch

Vorstandsmitglieder | Membres du Comité directeur

Prof. Dr. Nikolaus Beck
Università della Svizzera italiana, Institute of Management
Via G. Buffi 13, 6900 Lugano
E-Mail: nikolaus.beck@usi.ch

Prof. Dr. Norbert Lange
Université de Genève et Université de Lausanne, Ecole de Pharmacie, Sciences II
Quai Ernest Ansermet 30, 1211 Genève 4,
Email : norbert.lange@unige.ch

Prof. Dr. (Ph.D.) Stephan Morgenthaler
Ecole Polytechnique de Lausanne (EPFL), SB IMA STAP, MAB 1473 (Bâtiment MA)
Station 8, 1015 Lausanne
Email: stephan.morgenthaler@epfl.ch

Prof. Dr. med. Dr. phil. Hubert Steinke
Universität Bern, Institut für Medizingeschichte
Bühlstrasse 26, 3012 Bern
E-Mail: hubert.steinke@img.unibe.ch

Prof. Dr. Helmut Zander
Universität Freiburg, Theologische Fakultät, Dep. Glaubenswissenschaft
und Philosophie, Av. de l'Europe 20, 1700 Fribourg
E-Mail: helmut.zander@unifr.ch

Bulletin VSH-AEU erscheint drei- bis viermal im Jahr und wird gratis an die Mitglieder versandt. Abonnement: CHF 65 pro Jahr inkl. Versand Schweiz.

Bulletin VSH-AEU est publié trois à quatre fois par an et est distribué gratuitement aux membres. Abonnements : CHF 65 par an, frais de port compris en Suisse.

Bulletin VSH-AEU è pubblicato tre o quattro volte l'anno e viene distribuito gratuitamente ai membri. Abbonamenti: CHF 65 all'anno, comprese le spese di spedizione in Svizzera.

***Die Stimme
der Hochschuldozierenden***



***La voix
des Enseignant·e·s d'Université***